

## Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 24. Juli, 2014

*Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.*

**Aufgabe 1:** Wir betrachten die Partialbruchzerlegung der Funktion  $z \mapsto \frac{1}{\sin^2 z}$  aus Beispiel 5.3.

- (a) Bestimmen Sie durch mehrfaches Ableiten an der Stelle  $\frac{\pi}{2}$  den Wert von

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) und Beispiel 5.3

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \quad \text{für } k = 2, 4.$$

**Aufgabe 2:** Wir betrachten die Partialbruchzerlegung des Cotangens aus Beispiel 5.5.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\frac{1}{\sin z} = \cot \frac{z}{2} - \cot z$ , und leiten Sie eine Partialbruchzerlegung für  $\frac{1}{\sin z}$  her.  
(b) Welche Reihen können wir durch Einsetzen von  $\frac{\pi}{4}$  und  $\frac{\pi}{2}$  in die Partialbruchzerlegung von  $\frac{1}{\sin z}$  berechnen?

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie, dass

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}} \Gamma(z).$$

**Aufgabe 4:** Sei  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und seien  $z_0, z_1 \in \Omega$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gibt eine biholomorphe Abbildung  $F: \Omega \rightarrow \Omega$  mit  $F(z_0) = z_1$ .  
(b) Für alle  $w \in S_1(0)$  existiert eine biholomorphe Abbildung  $G_w: \Omega \rightarrow \Omega$  mit  $G_w(z_0) = z_1$  und  $G'_w(z_0) = wF'(z_0)$ .  
(c) Sei  $H: \Omega \rightarrow \Omega$  biholomorph mit  $H(z_0) = z_1$ . Dann gilt  $H = G_w$  für ein  $w \in S_1(0)$ .

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*