Prof. Dr. Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

10. Übungsblatt

Abgabetermin 24.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Die Abgabe erfolgt per E-Mail als Scan oder in TEX an jonas.schnitzer@math.uni-freiburg.de bis donnerstags um 10 Uhr.

Aufgabe 10.1 Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ CW-Spektren.

i.) Definieren Sie ein geeignetes CW-Spektrum $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ mit Abbildungen $i\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ und $j\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ vom Grad 0.

ii.) Zeigen Sie, dass es in der Kategorie $\mathcal{SCW}$ die universelle Eigenschaft eines Koproduktes erfüllt.

iii.) Konstruieren Sie Abbildungen $p\colon \mathbb{E}\vee\mathbb{F} \to \mathbb{E}$ und $q\colon \mathbb{E}\vee\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ vom Grad 0, so dass $p\circ i = \mathsf{id}_E$, $q \circ j = \mathsf{id}_F$ und $p \circ j = q \circ i = 0$.

iv.) Das Koprodukt ist auch ein Koprodukt in $\mathcal{HSCW}$. Insbesondere existieren alle Koprodukte in $\mathcal{HSCW}$.

Aufgabe 10.2 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i.) Es seien X und Y punktierte CW-Komplexe, dann ist $S^kX \vee S^kY \hookrightarrow S^kX \times S^kY$ eine $(2k-2)$-zusammenhängende Abbildung.

ii.) Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ und $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die Spektren aus Aufgabe 10.1. Zeigen Sie mit Teil (1) und Aufgabe 10.1, dass $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in $\mathcal{HSCW}$ erfüllt.

Aufgabe 10.3 Es sei $\mathbb{F} \to \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ eine Fasersequenz von Spektren. Konstruieren Sie analog zu Satz 4.72 eine natürliche lange Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(\mathbb{F}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{E}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \cdots$$

und beweisen Sie ihre Exaktheit.

Aufgabe 10.4 Betrachten Sie den soliden Teil des Diagramms aus CW-Spektren

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & \mathbb{H} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathbb{K} \arrow[d, dashed, "h"] \\
\mathbb{F} \arrow[r] & \mathbb{E} \arrow[r] & \mathbb{B}
\end{tikzcd}$$

wobei die obere Zeile eine Kofaser- und die untere eine Fasersequenz sei, und zeigen Sie:

i.) Gegeben eine der beiden Abbildungen f oder h, so dass das entsprechende Rechteck bis auf Homotopie kommutiert, lässt sich die andere so konstruieren, dass das andere Rechteck ebenfalls bis auf Homotopie kommutiert.

ii.) Wenn zwei der Abbildungen f, g, h Homotopieäquivalenzen sind, dann auch die dritte.

iii.) Eine Sequenz von Spektren ist genauso dann eine Fasersequenz, wenn sie eine Kofasersequenz ist.