Algebraische Topologie II — Prof. Dr. Sebastian Goette
Sommersemester 2020 — Jonas Schnitzer

`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/`

11. und letztes Übungsblatt

Abgabetermin 31.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Die Abgabe erfolgt per E-Mail als Scan oder in TEX an jonas.schnitzer@math.uni-freiburg.de bis donnerstags um 10 Uhr.

Aufgabe 11.1 Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

i.) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cl}(\Bbbk P^n) \geq n$, indem Sie ein nicht verschwindendes Cup-Produkt in einemgeeigneten reduzierten multiplikativen Kohomologiering von $\Bbbk P^n$ angeben.

ii.) Zeigen Sie, dass $\mathrm{LS}(\Bbbk P^n) \leq n$.

Aus Proposition 7.52 folgt dann, dass $\mathrm{LS}(\Bbbk P^n) = \mathrm{cl}(\Bbbk P^n) = n$

Aufgabe 11.2 Für $i = 0, 1$ seien B_i starke Duale von A_i in einer monoidalen Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ mit Auswertungs- und Koauswertungsabbildungen ε_i und η_i. Es sei $f\colon A_0 \to A_1$ ein Morphismus und

$$Df\colon B_1 \xleftarrow{\rho_{B_1}} B_1 \otimes E \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes\eta_0} B_1 \otimes A_0 \otimes B_0 \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes f\otimes\mathsf{id}} B_1 \otimes A_1 \otimes B_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} B_1 \otimes E \xrightarrow{\lambda_B} B_1$$

Zeigen Sie:

i.) Die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd} DA' \otimes A \arrow[r, "Df\otimes\mathsf{id}"] \arrow[d, "\mathsf{id}\otimes f"] & DA \otimes A \arrow[d, "\epsilon"] \\ DA' \otimes A' \arrow[r, "\epsilon'"] & E \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta'"] & A \otimes DA \arrow[d, "f\otimes\mathsf{id}"] \\ A' \otimes DA' \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes Df"] & A' \otimes DA \end{tikzcd}$$

ii.) Wenn $\mathcal{C}$ symmetrisch ist, gilt $D(Df) = f$.

Aufgabe 11.3 Es seien Y_0, Y_1 Spanier-Whitehead-Duale von X_0, X_1 vom Grad n. Es sei $g\colon Y_1 \to Y_0$ dual zu $f\colon X_0 \to X_1$ wie in der vorigen Aufgabe. Sei $\mathbb{E}$ ein beliebiges Spektrum. Zeigen Sie, dass man mit den Isomorphismen aus Bemerkung 8.6 ein kommutatives Diagramm erhält:

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{E}^k(X_1) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"', "{[\eta_1]/}"] & \tilde{E}^k(X_0) \arrow[d, "\cong"', "{[\eta_0]/}"] \\
\tilde{E}_{n-k}(Y_1) \arrow[r, "g_*"] & \tilde{E}_{n-k}(Y_0).
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 11.4 Es sei $\emptyset \neq K \subset S^n$ kompakter Umgebungsretrakt und $\mathbb{E}$ ein Spektrum. Wir betrachten die natürlichen Abbildungen $K \hookrightarrow K_+ \twoheadrightarrow S_0$.

i.) Zeigen Sie mit Übung 11.2, dass die Kollaps-Abbildung $S^n \to S^n|K$ zu $K_+ \to S_0$ dual ist.

ii.) Konstruieren mit Hilfe der exakten Homologie-Sequenz des Paares $(S^n, S^n \backslash K)$ und Übung 11.3 einen Isomorphismus

$$\tilde{E}^k(K) \longrightarrow \tilde{E}_{n-k-1}(S^n \backslash K).$$