Algebraische Topologie II
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

2. Übungsblatt

Abgabetermin 29.5.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Die Abgabe erfolgt per E-Mail als Scan oder in TEX an jonas.schnitzer@math.uni-freiburg.de bis donnerstags um 10 Uhr.

Aufgabe 2.1 Zeigen Sie, dass ein R-Modul M genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.

Aufgabe 2.2 Es sei R ein Hauptidealring, $r, s \in \mathsf{R}$, und B ein R-Modul. Zeigen Sie:

i.) $\operatorname{Tor}(\mathsf{R}/r, B) \cong \hom(\mathsf{R}/r, B) \cong \{b \in B \mid br = 0\} \subset B$

ii.) $\operatorname{Ext}(\mathsf{R}/r, B) \cong \mathsf{R}/r \otimes B \cong B/rB$

iii.) $\operatorname{Tor}(\mathsf{R}/r, \mathsf{R}/s) \cong \operatorname{Ext}(\mathsf{R}/r, \mathsf{R}/s) \cong \mathsf{R}/r \otimes \mathsf{R}/s \cong \hom(\mathsf{R}/r, R/s) \cong \mathsf{R}/(r, s)$

wobei (r, s) das von r und s erzeugte Ideal in R bezeichne.

Aufgabe 2.3 Beweisen Sie Proposition 5.63.

Aufgabe 2.4 Es sei R ein Hauptidealring, A, B seien R-Moduln, und $\operatorname{Tor}_{\mathsf{R}} A$ bezeichne den Torsionsuntermodul aus Bemerkung 5.64. Zeigen Sie:

i.) Der Modul $A/\operatorname{Tor}_{\mathsf{R}} A$ ist torsionsfrei.

ii.) Jeder endlich erzeugte Untermodul von $A/\operatorname{Tor}_{\mathsf{R}} A$ ist frei.

iii.) Es gilt $\operatorname{Tor}_{\mathsf{R}}(B, A/\operatorname{Tor}_{\mathsf{R}} A) = 0$.

iv.) Es gilt $\operatorname{Tor}_{\mathsf{R}}(B, \operatorname{Tor}_{\mathsf{R}} A) = \operatorname{Tor}_{\mathsf{R}}(B, A)$.

Hinweis: Jedes Element in einem Tensorprodukt $X \otimes Y$ kann als endliche Linearkombination von Elementen der Form $x \otimes y$ mit $x \in X$, $y \in Y$ geschrieben werden.

Organisatorisches

Aufgrund des Feiertages verschiebt sich die Abgabe dieses Übungsblattes auf Freitag, den 29.5. Außerdem möchten wir Sie daran erinnern, dass die Vorlesung am 28.5. außerplanmäßig im Raum vGoette stattfindet.