Algebraische Topologie II
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

3. Übungsblatt

Abgabetermin 4.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Die Abgabe erfolgt per E-Mail als Scan oder in TEX an jonas.schnitzer@math.uni-freiburg.de bis donnerstags um 10 Uhr.

Aufgabe 3.1 Wir betrachten $A = \mathbb{Z}/n$ und konstruieren den Moore-Raum MA_k, indem wir eine $(k+1)$-Zelle mit einer Abbildung $\phi\colon \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k$ vom Grad n an $\mathbb{S}^k$ ankleben. Indem wir das k-Skelett $\mathbb{S}^k$ auf einen Punkt abbilden, erhalten wir die Kollaps-Abbildung $f\colon MA_k \to MA_k/\mathbb{S}^k \cong \mathbb{S}^{k+1}$. Außerdem sei $g\colon MA_k \to \mathbb{S}^{k+1}$ die konstante Abbildung. Zeigen Sie:

i.) $f_* = g_* = 0\colon \tilde{\mathsf{H}}_\bullet(MA_k;\mathbb{Z}) \to \tilde{\mathsf{H}}_\bullet(\mathbb{S}^{k+1};\mathbb{Z})$ für alle $k \geq 0$,

ii.) $g_* = 0\colon \tilde{\mathsf{H}}_\bullet(MA_k;A) \to \tilde{\mathsf{H}}_\bullet(\mathbb{S}^{k+1};A)$ für alle $k \geq 0$,

iii.) $f_{k+1}\colon \tilde{\mathsf{H}}_{k+1}(MA_k;A) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathsf{H}}_{k+1}(\mathbb{S}^{k+1};A)$

Aufgabe 3.2 Seien A, B abelsche Gruppen. Wir betrachten den Raum $[MA_n, MB_n]$ der punktierten Abbildungen von MA_n nach MB_n bis auf Homotopie.

i.) Zeigen Sie mit Hilfe des Freudenthalschen Einhängungssatzes 3.74 und der Puppe-Sequenz aus Satz 4.67 (3), dass Stabilisieren für $n \geq 3$ den folgenden Isomorphismus liefert:

$$[MA_n, MB_n] \xrightarrow{S} [MA_{n+1}, MB_{n+1}].$$

ii.) Konstruieren Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ext}(A, \pi_{n+1}(MB_n)) \longrightarrow [MA_n, MB_n] \longrightarrow \hom(A, B) \longrightarrow 0.$$

iii.) Es sei $n \geq 3$. Zeigen Sie mit der Homotopiesequenz 3.70 für Kofaserungen, dass

$$\pi_{n+1}(MB_n) \cong B \otimes \mathbb{Z}/2 = B/2B.$$

iv.) Zeigen Sie, dass $\mathsf{Ext}(A, B/2B) = 0$, wenn Multiplikation mit 2 in B surjektiv oder in A injektiv ist.

Man beachte, dass die Sequenz in *ii.)* im Allgemeinen nicht spaltet.

Aufgabe 3.3 Es sei A ein R-Modul, und es gelte $\mathsf{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, A/2A) = 0$. Für $n \geq 3$ liefert die Modulstruktur auf A nach der vorangegangenen Aufgabe eine Abbildung

$$\mathsf{R} \hookrightarrow \hom_{\mathbb{Z}}(A, A) \cong [MA_n, MA_n].$$

Zeigen Sie, dass man für jeden Homologiefunktor $\tilde{\mathsf{h}}_\bullet$, jeden Raum X und jedes k die Gruppe $\tilde{\mathsf{h}}_k(X; A)$ als R-Modul auffassen kann. Man erhält also einen $\mathcal{M}od_{\mathsf{R}}$-wertigen Homologiefunktor

Aufgabe 3.4 Es sei $f\colon MA_n \to MB_n$ eine stetige punktierte Abbildung zwischen Moore-Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_*\colon A \cong \tilde{\mathsf{H}}_n(MA_n) \to B \cong \tilde{\mathsf{H}}_n(MB_n)$ injektiv ist. Zeigen Sie

i.) Dann ist der reduzierte Abbildungskegel Cf ein Moore-Raum zu $C = B/f_*A$.

ii.) Für jeden Homologiefunktor $(\tilde{\mathsf{h}}_\bullet, \partial_\bullet)$ und jeden Raum X erhalten wir die natürliche lange exakte Bockstein-Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \tilde{\mathsf{H}}_k(X; C) \longleftarrow \tilde{\mathsf{H}}_k(X; B) \longleftarrow \tilde{\mathsf{H}}_k(X; A) \xleftarrow{\partial} \tilde{\mathsf{H}}_{k+1}(X; C) \longleftarrow \cdots$$