Algebraische Topologie II
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

5. Übungsblatt (Pfingstbonusblatt)

Abgabetermin 19.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Alle Punkte auf diesem Übungsblatt sind Bonuspunkte.

Aufgabe 5.1 Zeigen Sie:

i.) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^s(\mathbb{S}^2) \cong \pi_1^s(\mathbb{S}^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ erzeugt.

ii.) Es bezeichne $\iota\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.

iii.) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$.

Aufgabe 5.2 *i.)* Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.80 für $(\mathbb{C}P^n; \mathbb{C}P^{n-1})$, dass $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) = \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$ alle $k < 2n-1$.

ii.) Bestimmen Sie $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

iii.) Bestimmen Sie $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 5.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Kolimiten.

i.) Der Kolimes $\operatorname{colim}(A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Pushouts.

ii.) Jeder Kolimes lässt sich als Pushout von Koprodukten schreiben.

Aufgabe 5.4 Es sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.70.

i.) Die Pfadfaserung $Pf \to Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff.

ii.) Der Unterraum $\operatorname{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf.

iii.) Die Abbildung $f \circ (f^*\mathrm{ev}_1)$ ist zu $p\colon Pf \to Y$ punktiert homotop.

iv.) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

Aufgabe 5.5 Es seien inverse Systeme (A_i, f_i), (A'_i, f'_i) und (A''_i, f''_i) wie in Bemerkung 6.12 gegeben.

i.) Zeigen Sie, dass alle f'_i surjektiv sind. Folgern Sie daraus

$$\lim{}^1 A'_i = 0 \ .$$

ii.) Zeigen Sie, dass für jedes i ein $j \geq i$ existiert mit $f''_{i+1} \circ \cdots \circ f''_k = 0$ f'ur alle $k \geq j$, falls (A_i, f_i) die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Folgern Sie, dass dann

$$\lim{}^1 A''_i = 0 \ .$$