Algebraische Topologie II
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

6. Übungsblatt

Abgabetermin 25.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Alle Punkte auf diesem Übungsblatt sind Bonuspunkte.

Aufgabe 6.1 Beweisen Sie einige der fehlenden Aussagen in Proposition 6.21.

i.) Zeigen Sie zunächst einige der Aussagen in (3) und (5) zum Smashprodukt.

ii.) Beweisen Sie dann die zweite Aussage in (4) auf Ketten–/Kokettenniveau.

iii.) Leiten Sie daraus alle anderen Aussagen über das Schrägprodukt ab.

Aufgabe 6.2 Es bezeichne $[\mathbb{C}P^n] \in \mathsf{H}_{2n}(\mathbb{C}P^n; R)$ die von der $2n$-Zelle erzeugte Homologieklasse. Zeigen Sie, dass $(\mathsf{H}_\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \frown)$ ein freier $(\mathsf{H}^\bullet(\mathbb{C}P^n; R); \smile)$-Modul mit Erzeuger $[\mathbb{C}P^n]$ ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Kronecker-Produkt $\langle [\mathbb{C}P^n]; \omega^n \rangle$.

Aufgabe 6.3 Zeigen Sie: die radiale Projektion vom "topologischen Huhn" X aus Beispiel 4.52 auf $\mathbb{S}^1$ ist nicht zusammenziehbar. Folgern Sie, dass $\tilde{\mathsf{H}}^1(X) = [X; H\mathbb{Z}_1] = 0$, obwohl X schwach zusammenziehbar ist.

Aufgabe 6.4 Wir fassen $A = \mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}$-Modul auf. Es sei MA_k der Moore-Raum und $f \colon MA_k \to \mathbb{S}^{k+1}$ die Kollaps-Abbildung aus Übung 3.1.

i.) Geben Sie die Koeffzientensequenzen für $\mathsf{H}^{k+1}(MA_k; \mathbb{Z})$ und $\mathsf{H}^{k+1}(\mathbb{S}^{k+1}; \mathbb{Z})$ aus Satz 6.16 an, und stellen Sie die von f induzierte Sequenzabbildung in einem kommutativen Diagramm dar.

ii.) Überprüfen Sie, dass beide Koeffzientensequenzen spalten, und dass die Spaltung nicht natürlich sind.

iii.) Folgern Sie, dass die Spaltung der Künneth-Sequenz in Folgerung 6.20 ebenfalls nicht natürlich sein kann.