Algebraische Topologie II | Prof. Dr. Sebastian Goette
Sommersemester 2020 | Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

7. Übungsblatt

Abgabetermin 2.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Die Abgabe erfolgt per E-Mail als Scan oder in TEX an jonas.schnitzer@math.uni-freiburg.de bis donnerstags um 10 Uhr.

Aufgabe 7.1 Sei X ein CW-Komplex, $f\colon A \to B$ ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen und $C = B/f(A)$. Konstruieren Sie mit Hilfe zellulärer Kohomologie eine natürliche exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow \tilde{\mathsf{H}}^k(X;A) \longrightarrow \tilde{\mathsf{H}}^k(X;B) \longrightarrow \tilde{\mathsf{H}}^k(X;C) \xrightarrow{\delta} \tilde{\mathsf{H}}^{k+1}(X;A) \longrightarrow \cdots .$$

Aufgabe 7.2 Es sei A eine abelsche Gruppe und es bezeichne $\mathsf{H}^\bullet(\,\cdot\,;\mathrm{A})$ die unreduzierte Kohomologie zum Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $H\mathrm{A}$. Zeigen Sie, dass für jeden topologischen Raum X

i.) $\mathsf{H}^0(X;\mathrm{A}) = [X,\mathrm{A}]$ und

ii.) $\mathsf{H}^1(X;\mathbb{Z}) = [X,\mathbb{S}^1]$

gilt. Die Gruppe A ist mit der diskreten Topologie ausgestattet, außerdem wird $[X,A]$ durch die Addition in A zu einer abelschen Gruppe.

Aufgabe 7.3 Es sei

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \ni ((z_1,z_2),\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \mapsto (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z_1,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z_2) \in \mathbb{S}^3.$$

Dann ist $\mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ ein $\mathbb{S}^1$-Prinzipalbündel. Zeigen Sie, dass es keinen Prinzipalbündelisomorphismus zur Hopffaserung gibt.

Aufgabe 7.4 Es sei $P \to B$ ein G-Prinzipalbündel und G wirke auf einem topologischen Raum F so, dass G die Initialtopologie zur Abbildung $G \to k\mathrm{C}(F;F)$ trägt. Zeigen Sie:

i.) für einen Topologischen Raum U stimmt die Produkttopologie auf $U \times k\mathrm{C}(F;F)$ mit der Initialtopologie der Abbildung

$$U \times k\mathrm{C}(F;F) \ni (u,\phi) \mapsto (f \mapsto (u,\phi(f))) \in k\mathrm{C}(F;U\times F)$$

überein.

ii.) für $U \times G \to k\mathrm{C}(F; U \times F)$ gilt das entsprechende.

iii.) P trägt die Initialtopologie zur Abbildung

$$P \ni x \mapsto (f \mapsto [x, f]) \in k\mathrm{C}(F; P \times_G F).$$