Prof. Dr. Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2020/AT2/

8. Übungsblatt

Abgabetermin 9.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Die Abgabe erfolgt per E-Mail als Scan oder in TEX an jonas.schnitzer@math.uni-freiburg.de bis donnerstags um 10 Uhr.

Aufgabe 8.1 Es sei $E \to B$ ein Vektorbündel mit parakompakter Basis B. Zeigen Sie:

i.) Es existiert eine Metrik

$$g\colon E \times_B E \to \mathbb{R},$$

d.h. eine faserweise bilineare Abbildung, so dass $g(v_p, v_p) > 0$ für alle $v_p \neq 0$.

ii.) Für je zwei Metriken g, g' existiert ein Vektorbündelisomorphismus $\Phi\colon E \to E$ (über $\mathsf{id}\colon B \to B$), so dass

$$g(Av_p, Aw_p) = g'(v_p, w_p) \quad \forall v_p, w_p \in E.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass jeder positive symmetrische Endomorphism über der Identität ein Quadrat eines eindeutigen symmetrischen positiven Endomorphismen über der Identität ist.

iii.) (Bonusaufgabe) Beweisen Sie den Hinweis.

Aufgabe 8.2 Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass $\Bbbk P^\infty \cong BU(1, \Bbbk)$.

Aufgabe 8.3 Zeigen Sie:

i.) Die Konstruktionen vor Definition 6.45, die jeder Gruppe G einen schwach zusammenziehbaren Raum EG mit freier G-Wirkung und einen klassifizierenden Raum BG zuordnen, so dass $BG = EG/G$, sind Funktoren von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie $kw\mathcal{H}$.

ii.) Es sei $H \subseteq G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe, so dass $G \to G/H$ ein Prinzipalbündel ist. Zeigen Sie, dass der Raum EG/H zu BH homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient G/H die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung $BH \to BG$ ist.

Aufgabe 8.4 Die übliche Wirkung von $U(n+1)$ auf $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Abbildung

$$p\colon U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in \mathbb{S}^{2n+1}.$$

i.) Zeigen Sie, dass p ein Faserbündel mit Faser $U(n) \subset U(n+1)$ ist.

ii.) Folgern Sie, dass $\iota_n : U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ eine $(2n)$-zusammenhängende Abbildung ist.

iii.) Bestimmen Sie $\pi_k(U(n))$ für $k = 0, 1$ und alle n.

iv.) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) \cong \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle k, wobei der Limes über n läuft. Welche $\pi_k(U(n))$ können Sie mit dieser Information bestimmen?