TOPOLOGIE VON MANNIGFALTIGKEITEN

S. GOETTE, J. SCHNITZER, SS 2020

Vorläufiger Ablauf. Dies ist der Vorläufige Ablauf des Seminars und die Literaturliste für die angefügten Themen. Änderungen werden im Forum oder in den wöchentlichen Online-Treffen bekanntgegeben.

1. Kobordismus

Eine recht grobe, aber immer noch aussagekräftige Äquivalenzrelation auf der Klasse aller kompakten Mannigfaltigkeiten ist Kobordismus. In diesem Abschnitt beschreiben wir Kobordismus durch Homotopiegruppen von Thom-Räumen. Wichtige Hilfsmittel dazu sind der Einbettungssatz von Whitney und klassifizierende Räume für Vektorbündel. Einen Spezialfall, der ohne klassifizierende Räume auskommt, nämlich gerahmten Bordismus, kennen wir aus der Vorlesung. In den hinteren Abschnitten betrachten wir speziell unorientierten und orientierten Kobordismus.

12. 5. Satz von Whitney, Untermannigfaltigkeiten. (Unter-) Mannigfaltigkeiten (Wdh); Whitneys Einbettungssatz, Tangential- und Normalenbündel, stabiles Normalenbündel [Hi, Sec. 1.3], [M, Ch. 1].

19. 5. Transversalität. Transversalität und Untermannigfaltigkeiten, Lemma von Sard (evtl. Beweis), Transversalitätssatz [Hi, Sec. 3.2], evtl. [M, Ch. 2]

26. 5. Klassifizierende Räume. Grassmann-Mannigfaltigkeiten (orientiert, unorientiert, komplex), Vektorbündel, universelle Bündel, klassifizierende Abbildungen [H2, S. 27–31], [Hi, Sec. 4.3–4.5], [MS, Ch. 5]

2. 6. CW-Struktur von Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Schubert-Zellen der reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten [MS, Ch. 6]. Analoge Konstruktion für komplexe Grassmannsche.

9. 6. Die Pontryagin-Thom Konstruktion. Thom-Räume, Beschreibung der unorientierten Kobordismen-Gruppen als Homotopiegruppen von Thom-Räumen [Hi, Ch. 6], [MS, S. 208–215]

2. Stiefel-Whitney-Klassen

Charakteristische Klassen ordnen Vektorbündeln über beliebigen topologischen Räumen in natürlicher Weise Kohomologie-Klassen zu. Im Wesentlichen entsprechen diese Klassen genau den Kohomologieklassen der zugehörigen klassifizierenden Räume. Wir betrachten hier Klassen von reellen Vektorbündeln in der Kohomologie modulo 2 und einige ihrer Anwendungen. Ein wichtiges Hilfsmittel sind dabei die Steenrod-Quadrate, eine Zusatzstruktur auf der Kohomologie modulo 2.

Auf Mannigfaltigkeiten erhalten wir charakteristische Zahlen durch „Integration“ charakteristischer Klassen. Stiefel-Whitney-Zahlen helfen bei der Beschreibung des unorientierten Bordismusringes. Wu’s Formel liefert eine interessante Beschreibung der Stiefel-Whitney-Klassen auf Mannigfaltigkeiten und zeigt, dass diese nicht von der differenzierbaren Struktur abhängen.

16. 6. Stiefel-Whitney-Klassen I. Axiome für Stiefel-Whitney-Klassen, totale Stiefel-Whitney-Klasse, Beispiele TS^n, $T\mathbb{R}P^n$ [MS, Ch. 4 bis Thm 4.5]

23. 6. Stiefel-Whitney-Klassen II. Eindeutigkeit [MS, Ch. 7]; Anwendungen: Wann ist S^n parallelisierbar? Wann existieren Einbettungen $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N$? [MS, Thms 4.6–4.8].

30. 6. Stiefel-Whitney-Klassen III. Axiome für die Steenrod-Quadrate. Konstruktion der Stiefel-Whitney Klassen mit Hilfe des Thom-Isomorphismus [MS, Ch. 8]

7. 7. Die Steenrod-Algebra. Konstruktion der Steenrod-Operationen entweder über Kettenkomplexe [Sw, Ch. 18] oder über Abbildungen in das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum [H1, App. 4L], weitere Eigenschaften.

14. 7. Wus Formel. Die Stiefel-Whitney-Klassen einer Mannigfaltigkeit hängen nicht vom Diffeomorphietyp ab und lassen sich mit Hilfe der Poincaré-Dualität aus den Steenrod-Quadraten ableiten [MS, Ch. 11 ab Lemma 11.13].

3. Pontryagin-Klassen und der Signatursatz

Im Falle orientierter reeller Vektorbündel erhält man zusätzliche charakteristische Klassen in der ganzzahligen Kohomologie. Mit ihnen lässt sich der orientierte Bordismusring modulo Torsion beschreiben. Das reicht, um einen Zusammenhang zwischen der Schnittform auf der mittleren Kohomologie einer orientierten Mannigfaltigkeit und gewissen Pontryagin-Zahlen herzustellen.

21. 7. Chern- und Pontryagin-Klassen. Axiomatische Beschreibung der Chern-Klassen, eventuell Konstruktion [H2, Sec. 3.1] oder [MS, Ch. 14]. Definition der Pontryagin-Klassen [H2, Sec. 3.2], [MS, Ch. 15].

28. 7. Orientierter Kobordismus. Invarianz charakteristischer Zahlen unter Kobordismus, Hurewicz-Isomorphismus modulo Torsion, orientierter Kobordismusring modulo Torsion[MS, Ch. 17, 18], [St, Ch. IX].

(Der Hirzebruch-Signatursatz). Schnittform und Signatur einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit. Multiplikative Sequenzen und Geschlechter (Überblick), Signatursatz [MS, Ch. 19].

Literatur

[H1] A. Hatcher: Algebraic Topology, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html` .

[H2] A. Hatcher: Vector bundles and K-theory (Fragment), `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html` .

[Hi] M. W. Hirsch: Differential Topology, 5. Aufl., Springer, New York, 1994

[M] J. Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[MS] J. Milnor, J. Stasheff: Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, 1974.

[St] R. E. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[Sw] R. M. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.