Funktionalanalysis
Sommersemester 2021

Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

1. Übungsblatt

Abgabetermin 26.4.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 1.1 Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\Bbbk = \mathbb{C}$, $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}_0^+$ eine Halbnorm auf einem $\Bbbk$-Vektorraum X, das heißt, sie erfüllt Subadditivität und Multiplikativität, aber an Stelle von Positivität gilt nur $\|x\| \geq 0$ für alle x. Zeigen Sie, dass $\ker\|\cdot\| = \{\, x \in X \mid \|x\| = 0 \,\} \subseteq X$ ein Untervektorraum ist und, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\overline{X} = X/\ker\|\cdot\|$ induziert.

Übung 1.2 Es sei M eine Menge und (N, d) ein metrischer Raum. Es sei außerdem die Abbildung $d_{\sup} \colon N^M \times N^M \to [0, \infty]$ definiert durch

$$d_{\sup}(f, g) = \sup_{m \in M} d(f(m), g(m)).$$

Zeigen Sie, dass $d_{\sup}$ die Axiome einer Metrik erfüllt, wobei wir in der Dreiecksungleichung $\infty + x = \infty = x + \infty$ für alle $x \in [0, \infty]$ setzen.

Übung 1.3 Es seien M und (N, d) wie in Übung 1.2. Zeigen Sie: eine Folge $(f_n \colon M \to N)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f \colon M \to N$, wenn $(f_n \colon M \to N)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $d_{\sup}$ aus Übung 1.2 gegen f konvergiert.

Hinweis: Eine Folge $(f_n \colon M \to N)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent mit Grenzwert $f \colon M \to N$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m \in M \; : \; \mathrm{d}(f_n(m), f(m)) < \varepsilon \;\text{ für alle } n > N.$$

Übung 1.4 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es sei

$$C_0^0(\Omega; \mathbb{R}) := \{ f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}) \mid \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \subseteq \Omega \text{ kompakt } : \sup_{x \in \Omega \setminus K} |f(x)| < \varepsilon \}$$

Zeigen Sie: für $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $f \in C_0^0(\Omega; \mathbb{R})$ genau dann, wenn eine Cauchy-Folge in $C_c^0(\Omega; \mathbb{R})$ existiert, die bezüglich $\|\cdot\|_{\sup}$ gegen f konvergiert.