

## 2. Übungsblatt

Abgabetermin 3.5.2020

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.*

**Übung 2.1** Es seien  $X, Y$  normierte  $\mathbb{k}$ -Vektorräume für  $\mathbb{k} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Zeigen Sie:

1. Jede kompakte lineare Abbildung ist auch beschränkt, also  $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ .
2. Für  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$  gilt  $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$ .

**Übung 2.2** Es seien  $X, Y, Z$  normierte  $\mathbb{k}$ -Vektorräume für  $\mathbb{k} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Zeigen Sie:

1. Für  $K \in \mathcal{K}(X, Y)$  und  $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$  gilt  $A \circ K \in \mathcal{K}(X, Z)$ .
2. Für  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $K \in \mathcal{K}(Y, Z)$  gilt  $K \circ A \in \mathcal{K}(X, Z)$ .

**Übung 2.3** Es seien  $(X, d_X)$  und  $(M, d_M)$  metrische Räume und  $X$  sei kompakt. Es sei außerdem  $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, M)$  eine gleichgradig stetige Menge. Zeigen Sie, dass für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_M(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

für alle  $x, y \in X$ .

**Übung 2.4** Es sei  $(Y, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum und es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Wir definieren für alle  $\alpha \in [0, 1]$  die Abbildung  $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}: C(M, Y) \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_{\text{sup}} + \sup_{p \neq q} \frac{\|f(p) - f(q)\|}{d(p, q)^\alpha}.$$

Es sei außerdem

$$C^{0,\alpha}(M, X) := \{f: M \rightarrow X \mid \|f\|_{0,\alpha} < \infty\}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Abbildung  $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}$  definiert eine Norm auf  $C^{0,\alpha}(M, X)$ .
2. Für  $\alpha = 0$  ist  $\|\cdot\|_{0,\alpha}$  äquivalent zur Supremumsnorm.