Funktionalanalysis
Sommersemester 2021

Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

3. Übungsblatt

Abgabetermin 10.5.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 3.1 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe und beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie:

1. Für $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt $C^{\ell+1,0}(\overline{\Omega}) \subseteq C^{\ell,1}(\overline{\Omega})$.
2. Für $\alpha, \beta \in [0,1]$ und $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k > \ell$ und $k + \alpha > \ell + \beta$ ist die Inklusionsabbildung $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{\ell,\beta}(\overline{\Omega})$ kompakt.

Hinweis: Benutzen Sie die Spezialfälle aus dem Video FA2g.

Übung 3.2 Es sei X ein $\Bbbk$-Vektorraum und $A \subseteq X$ eine linear unabhängige Teilmenge von X. Benutzen Sie das Lemma von Zorn, um zu zeigen, dass sich A zu einer ungeordneten Basis von X erweitern lässt.

Übung 3.3 Wir betrachten den normierten Vektorraum ℓ^∞ der beschränkten, reellwertigen Folgen mit der Supremumsnorm. Es bezeichne $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Folgen mit

$$e_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{für } k = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und es bezeichne $\mathbb{1}$ die konstante Folge mit $\mathbb{1}_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $\phi \in (\ell^\infty)'$ existiert, mit

$$\phi(e_i) = 0 \;\text{ für alle } i \in \mathbb{N} \;\text{ und } \phi(\mathbb{1}) \neq 0.$$

Es sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ℓ^1-Folge („ℓ^1“ bedeutet hier, dass die Reihe $\sum_{i=1}^\infty y_i$ absolut konvergiert). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{(y_k)_{k\in\mathbb{N}}} \colon \ell^\infty \ni (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^\infty y_i x_i \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert ist und $\Phi_{(y_k)_{k\in\mathbb{N}}} \in (\ell^\infty)'$ gilt. Existiert ein $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, so dass $\Phi_{(y_k)_{k\in\mathbb{N}}} = \phi$?

Übung 3.4 Es sei $X = (L^\infty((-1,1)), \|\cdot\|_{\sup})$. Wir definieren die Abbildung

$$\phi\colon X \ni f \mapsto \int_{-1}^{1} t f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass ϕ stetig ist und berechnen Sie $\|\phi\|$.
2. Finden Sie eine Funktion $f \in X$ mit $\|f\|_{\sup} = 1$ und $|\phi(f)| = \|\phi\|$, oder beweisen Sie, dass es eine solche Funktion nicht gibt.
3. Beantworten Sie 1. und 2. für $X = (C^0([-1,1]), \|\cdot\|_{\sup})$.