Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

4. Übungsblatt

Abgabetermin 17.5.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 4.1 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $u \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

1. Es existiert eine stetige lineare Abbildung $f\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_{\mathrm{op}} = 1$ und $f(u) = \|u\|$.
2. Falls die Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ strikt konvex ist, dann ist f eindeutig.

   Hinweis: Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum X heißt strikt konvex, wenn für $x_0 \neq x_1 \in X$ mit $\|x_0\| = \|x_1\| = 1$ und für alle $t \in (0,1)$ gilt
   $$\|(1-t)x_0 + tx_1\| < 1.$$

Übung 4.2 Es seien $(U, \|\cdot\|_U)$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ normierte Vektorräume. Auf $U \oplus V$ betrachten wir $\|(x,y)\|_{U\oplus V} = \|x\|_U + \|y\|_V$. Zeigen Sie:

1. Das ist eine Norm, U und $V \subset U \oplus V$ sind abgeschlossen, und die Projektionsabbildungen auf U und V sind stetig.
2. Wenn U und V vollständig sind, ist auch $U \oplus V$ vollständig.

Übung 4.3 Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f \in C^0([0,1])$ gibt, die an keiner stelle $x \in (0,1)$ differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen
$$D_n := \{f \in C^0([0,1]) \mid \exists x_0 \in [0,1] \text{ mit } \sup_{y\in[0,1]\setminus\{x_0\}} \Big|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\Big| \leq n\}$$
und zeigen Sie, dass diese abgeschlossen sind und keine inneren Punkte besitzen.

Übung 4.4 (1+2+1 Punkte) Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimesnionaler Banachraum. Zeigen Sie:

1. Jeder endlich-dimensionale Untervektorraum $V \subseteq E$ is abgeschlossen und besitzt keine inneren Punkte.

2. E hat keine abzählbare Hamelbasis.
3. Es gibt keine Norm auf dem Raum der Polynomfunktionen auf $[0, 1]$, bezüglich dieser vollständig ist.