Funktionalanalysis
Sommersemester 2021

Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

5. Pfingst-Übungsblatt

Abgabetermin 31.5.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Die Gesamtpunktzahl auf diesem Übungsblatt beträgt 16 Punkte + 16 Bonuspunkte.

Übung 5.1 (1+1+2 Punkte) *Es sei ℓ^1 der Raum der Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$, deren Reihe absolut konvergiert, ausgestattet mit der Norm*

$$\|\cdot\|_{\ell^1} : \ell^1 \ni (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \in \mathbb{R}.$$

Sie dürfen verwenden, dass $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ ein Banachraum ist. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$.

1. *Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota\colon \ell^\infty \to (\ell^1)'$, die für $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $\mathbf{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ durch*

$$\iota(\mathbf{y})(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i$$

   gegeben ist, wohldefiniert, linear, stetig und injektiv ist.

2. *Es bezeichne $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ die ℓ^1-Folgen mit*

$$e_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{für } k = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   und es sei $\phi \in (\ell^1)'$. Zeigen Sie, dass $(\phi(e^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

3. *Benutzen Sie 1. und 2. um zu zeigen, dass ι ein stetiger linearer Isomorphismus ist.*

Übung 5.2 *Im Sinne von Übung 5.1 können wir $(\ell^1)'$ mit ℓ^∞ identifizieren. Es bezeichne $c_0 \subseteq \ell^\infty \cong (\ell^1)'$ den Unterraum der Nullfolgen.*

1. *Zeigen Sie, dass c_0 ein abgeschlossener Unterraum ist.*
2. *Bestimmen Sie $c_0^\perp$ und $c_0^{\perp\perp}$. Verifizieren Sie damit $c_0 \neq c_0^{\perp\perp}$.*

Übung 5.3 *Es sei $(A, D(A))$ der unbeschränkte Operator auf ℓ^1 mit*

$$D(A) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid (k \cdot x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1\}$$

und

$$A((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (k \cdot x_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A)$$

gegeben.

1. *Zeigen Sie, dass A dicht definiert und abgeschlossen ist.*
2. *Bestimmen Sie $D(A^*)$, A^* und $\overline{D(A^*)}$.*

Übung 5.4 *Es sei $T \in \mathcal{L}(\ell^1, \ell^1)$ gegeben durch*

$$T\colon \ell^1 \ni (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\frac{1}{k} x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Berechenen Sie $N(T)$, $N(T)^\perp$, T^*, $R(T^*)$ und $\overline{R(T^*)}$.

Übung 5.5 *Sei $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ offen. Finden Sie eine L^∞-Funktion f auf Ω, die nicht im Abschluss des Definitionsbereichs der schwachen Ableitung liegt.*

Übung 5.6 *Es sei $E = (C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$. Wir betrachten den Operator $A\colon D(A) \subseteq E \to E$ mit $D(A) := C^1([0,1])$ und $Au := u'$.*

1. *Zeigen Sie $\overline{D(A)} = E$.*
2. *Untersuchen Sie, ob A beschränkt und/oder abgeschlossen ist.*
3. *Es sei $B\colon D(B) \subseteq E \to E$ mit $D(B) := C^2([0,1])$ und $Bu := u'$. Untersuchen Sie, ob B abgeschlossen ist.*

Übung 5.7 (1+2+1 Punkte) *Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass ℓ^∞ nicht separabel ist. Wir betrachten hierzu*

$$\phi\colon 2^{\mathbb{N}} \ni X \mapsto \phi(X) \in \ell^\infty,$$

wobei $2^{\mathbb{N}}$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ bezeichne und

$$\phi(X)_k = \begin{cases} 1, & \text{für } k \in X \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

1. *Zeigen Sie, dass $\|\phi(X) - \phi(Y)\|_{\ell^\infty} = 1$ für $X \neq Y \in 2^{\mathbb{N}}$.*
2. *Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und es sei $M \subseteq V$ eine überabzählbare Teilmenge mit $\|m - n\| = 1$ für alle $m \neq n \in M$, dann ist V nicht separabel.*

3. *Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.*

Übung 5.8 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die schwachen Ableitungen $f_1, \ldots, f_n \in L^p(\Omega)$ genau dann schwach differenzierbar sind, wenn Funktionen $f_{ij} \in L^p(\Omega)$ existieren, so dass*

$$\int_\Omega f_{ij}\, \varphi \, d\lambda = \int_\Omega f \, \partial_i \partial_j \varphi \, d\lambda$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$ und für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Folgern Sie, dass der Satz von Schwarz für schwache Ableitungen gilt.