Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

6. Übungsblatt

Abgabetermin 7.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 6.1 *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und A, B seien zwei disjunkte messbare Teilmengen mit $0 < \mu(A) \leq \mu(B) < \infty$. Zeien Sie: für $p \neq 2$ kommt die L^p-Norm auf $L^p(\Omega)$ nicht von einem Skalarprodukt.*
Hinweis: Parallelogrammgleichung!

Übung 6.2 *Es sei B eine symmetrische, beschränkte Bilinearform auf einem reellen Hilbertraum H mit $B(y, y) \geq 0$ für alle $y \in H$. Es sei $x \in H$ und $\varphi \in H'$. Zeigen Sie: es gilt $B(x, \cdot) = \varphi$ genau dann, wenn*

$$\frac{1}{2}\, B(x, x) - \varphi(x) \leq \frac{1}{2}\, B(y, y) - \varphi(y)$$

für alle $y \in H$.

Übung 6.3 *Es sei $(H, \|\cdot\|_H)$ ein Hilbertraum, $V \subset H$ ein dichter Unterraum, und $\|\cdot\|_V$ eine Norm, bezüglich der V vollständig ist, mit $\|\cdot\|_H \leq C\, \|\cdot\|_V$ für ein $C < \infty$. Es sei $T\colon H \to V'$ gegeben durch $Tx = \langle x, \cdot \rangle$. Zeigen Sie:*

1. *$\|T\|_{\mathrm{op}} \leq C$,*
2. *T ist injektiv,*
3. *Wenn V reflexiv ist, ist $R(T) \subset V'$ dicht,*
4. *Für $\varphi \in V'$ gilt $\varphi \in R(T)$ genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass $c|\varphi(v)| \leq \|v\|_H$.*

Übung 6.4 *Wir betrachten auf dem Raum $\ell^2(\mathbb{R})$ die beschränkte Bilinearform*

$$B((x_k), (y_k)) = \sum_k x_k\, (y_k - y_{k+1})\ .$$

1. *Zeigen Sie, dass* $B((x_k),(x_k)) > 0$ *für alle* $(x_k) \in \ell^2(\mathbb{R}) \setminus \{(0)\}$.

   Hinweis: Zeigen Sie
   $$B((x_k),(x_k)) = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}\sum_k (x_k - x_{k+1})^2 \ .$$

2. *Ist die Abbildung* $\ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})'$ *mit* $(x_k) \mapsto B((x_k),\,\cdot\,)$ *bijektiv?*

3. *Ist die Abbildung* $\ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})'$ *mit* $(x_k) \mapsto B(\,\cdot\,,(x_k))$ *bijektiv?*

4. *Finden Sie für alle* $\varepsilon > 0$ *eine Folge* $(x_k) \in \ell^2(\mathbb{R})$ *mit* $B((x_k),(x_k)) < \varepsilon\|(x_k)\|_{\ell^2}$.