Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

7. Übungsblatt

Abgabetermin 14.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 7.1 (1+2+1 Punkte) ***In der ursprünglichen Version von Proposition 5.11 hat sich ein Fehler eingeschlichen. Diese Aufgabe liefert ein Gegenbeispiel für die ursprüngliche Aussage. (Das Skript und das Video zu diesem Teil sind und/oder werden ausgetauscht.)***

Es sei $H = L^2((-1,1))$ und $\mathbb{1} \in H$ die konstante Funktion mit Wert 1. Wir betrachten den dicht definierten, unbeschränkten Operator $A\colon D(A) \subset H \to H$ mit $D(A) = C_0^\infty((-1,1))$ und

$$A(f) = f + f(0)\,\mathbb{1}\ .$$

1. *Finden Sie eine Nullfolge $f_k \in D(A)$, für die $\lim_{k\to\infty} A(f_k) = y \neq 0$ existiert.*
2. *Bestimmen Sie $D(A^*)$ und A^*.*
3. *Gibt es einen abgeschlossenen Operator, der A fortsetzt?*

Übung 7.2 *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeigen Sie:*

1. *Wenn eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X schwach gegen 0 konvergiert, dann konvergiert $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Y schwach gegen 0.*
2. *Falls T bijektiv ist, dann gilt in Teil 1. auch die Umkehrung.*

Übung 7.3

1. *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$ mit Grenzwert $f \in C([0,1])$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert.*
2. *Es sei X ein Banachraum und $K \subseteq X$ eine kompakte Untermenge (in der starken Topologie) und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert x und $x_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon bezüglich der starken Topologie konvergiert und der Grenzwert x in K liegt.*

Übung 7.4 (3+1 Punkte) *Es sei ℓ^1 der Raum der Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$, deren Reihe absolut konvergiert, ausgestattet mit der Norm*

$$\|\cdot\|_{\ell^1} : \ell^1 \ni (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \in \mathbb{R}.$$

1. *Zeigen Sie, dass eine schwach konvergente Folge in ℓ^1 auch bezüglich der Norm konvergiert.*

   Hinweis: Setzen Sie voraus, dass die Aussage falsch ist und führen Sie einen Beweis durch Widerspruch indem Sie die folgenden Schritte zeigen:

   - *Es existieren $\mathbf{x}^{(k)} \in \ell^1$ mit $\|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\ell^1} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbf{x}^{(k)}$ gegen 0 bezüglich der schwachen Topologie konvergiert.*
   - *Man kann eine Teilfolge $x^{(k_j)}$ und disjunkte Mengen $M_j \subseteq \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$*

     $$\sum_{n\in M_j} |x_n^{(k_j)}| > \frac{1}{2} \text{ und } \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus M_j} |x_n^{(k_j)}| < \frac{1}{4}$$

     gilt.
   - *Man kann ein Funktional $u \in \ell^\infty \cong (\ell^1)'$ konstruieren, so dass $u(x^{(k_j)}) > \frac{1}{4}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

2. *Beweisen oder widerlegen Sie Folgende Aussage: Eine Teilmenge $M \subset \ell^1$ ist genau dann in der schwachen Topologie abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge, deren Folgenglieder in M liegen, auch in M liegt.*

   Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe 1.) und Folgerung 7.11 (1).