Anwesenheitsübung zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Wir werden uns anhand eines Beispiels überlegen, wie „alltagstauglich“ der Begriff eines metrischen Raums ist. Die ersten beiden Aufgaben dienen der Vorbereitung.

Aufgabe 1 Definiere $d_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$d_1(x,y) = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n|.$$

Zeigen Sie: d_1 ist eine Metrik.

Aufgabe 2 Es sei (M,d) ein metrischer Raum und sei $N \subset M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: $d|_{N\times N}$ ist eine Metrik auf N.

Aufgabe 3 (Taxi-Metrik) Wir betrachten die Teilmenge $S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ als idealisiertes Straßengitter einer Stadt (z.B. Mannheim oder Neuf-Brisach).

(a) Veranschaulichen Sie sich S.

(b) Definieren sie eine Funktion $d_{\text{Taxi}} \colon S \times S \to \mathbb{R}$ als Wegstrecke eines Taxis zwischen zwei Punkten in S.

(c) Zeigen Sie: d_{Taxi} ist eine Metrik.

(d) Gilt das auch für die Taxi-Kosten, wenn man für jede Strecke zusätzlich eine Grundgebühr zahlt, also für die Funktion $a + b\, d_{\text{Taxi}}(x,y)$, wobei $a,\ b > 0$?

(e) Vergleichen Sie d_{Taxi} und $d_1|_{S\times S}$.

Aufgabe 4 (Manhattan-Metrik) Wir führen eine Einbahnstraßenregelung ein: Auf Straßen $\mathbb{R} \times \{n\}$ dürfen Taxis nur nach rechts (links) fahren, wenn n (un)gerade ist. Auf Straßen $\{m\} \times \mathbb{R}$ dürfen Taxis nur nach oben (unten) fahren wenn m (un)gerade ist. Es bezeichne $d_{\text{Manhattan}}(x,y)$ die Strecke, die ein Taxi von $x \in S$ nach $y \in S$ mindestens zurücklegen muss.

(a) Ist $d_{\text{Manhattan}}$ eine Metrik?

(b) Vergleichen Sie $d_{\text{Manhattan}}$ mit d_1 und d_{Taxi}.