

# 1. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 4.5.

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_k)_k$  eine Folge in  $M$ . Es seien  $y, z \in M$ . Beweisen Sie in Analogie zu Proposition 2.8: Wenn  $(x_k)_k$  sowohl gegen  $y$  als auch gegen  $z$  konvergiert, dann gilt  $y = z$ .

**Aufgabe 2 (10 Punkte=3+4+3 Punkte)** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $0 \leq \kappa < 1$  und  $f: M \rightarrow M$  eine  $\kappa$ -Kontraktion. Zeigen Sie:

- Für  $x_0 \in M$  beliebig ist die induktiv durch  $x_{k+1} = f(x_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  definierte Folge eine Cauchy-Folge.
- Die obige Folge konvergiert genau dann gegen  $y \in M$ , wenn  $f(y) = y$  gilt.
- Vervollständigen Sie den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes 6.9.

**Aufgabe 3 (10 Punkte=4+4+2 Punkte)** Es sei  $p$  eine Primzahl. Wir definieren  $d_p: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$d_p(x, y) = \begin{cases} p^{-k}, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases},$$

dabei Sei im ersten Fall  $y - x = p^k \frac{m}{n}$  mit  $k, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+$ , so dass  $p$  weder  $m$  noch  $n$  teilt.

- Zeigen Sie: für alle  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  gilt

$$d_p(x, z) \leq \max(d_p(x, y), d_p(y, z)).$$

- Unter welchen Bedingungen gilt in (a) Gleichheit?
- Zeigen Sie, dass  $d_p$  eine Metrik auf  $\mathbb{Q}$  definiert.

*Hinweis:* Eine Primzahl  $p$  teilt ein Produkt genau dann, wenn sie mindestens einen der Faktoren teilt.

**Aufgabe 4 (10 Punkte=4+3+3 Punkte)** Wir betrachten die Menge  $M = \{0, 1\}$  und setzen  $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, M\}$ .

- Zeigen Sie, dass  $(M, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum ist.
- Überlegen Sie sich, dass jede Folge in  $M$  gegen 0 konvergiert.
- Welche Folgen konvergieren gegen 1?