

10. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 13.7.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es seien $p, v \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = p + tv$ gegeben: Zeigen Sie: dann beschreibt

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\gamma} (x dy - y dx) \right|$$

die Fläche des Dreiecks aus den Punkten 0 , $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte=4+6 Punkte) Zeigen Sie:

(a) die Kurve $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ parametrisiert eine Teilmenge von

$$H := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \}.$$

(b) Für alle $a \leq b$ gilt

$$\int_{\gamma|_{[a,b]}} (x dy - y dx) = b - a.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte=5+2+3 Punkte) Es seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$. Wir definieren

$$S(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 dt.$$

(a) Zeigen Sie mit Aufgabe 3 (a) von Blatt 3, dass

$$L(\gamma)^2 \leq (b - a)S(\gamma).$$

(b) Zeigen Sie, dass in (a) genau dann Gleichheit gilt, wenn $\|\gamma'(t)\|$ konstant ist.

Hinweis: Die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Aufgabe 3 (a) von Blatt 3) gilt genau dann, wenn f und g in $C^0([a, b])$ linear abhängig sind.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b): die Kurve γ ist genau dann stationär für S , wenn γ die kürzeste Kurve von p nach q ist und $\|\gamma'\|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstant ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte=2+2+4+2 Punkte) Wir betrachten das Längenfunktional L aus Satz 8.11 für reguläre Kurven und das Funktional S aus Aufgabe 3 für beliebige C^1 -Kurven $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (a) Geben Sie die zugehörigen Lagrangefunktionen an.
- (b) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktionen zeit- und ortsunabhängig sind.
- (c) Bestimmen Sie jeweils die Energie E und die Impulse P_1, \dots, P_n .
- (d) Was bedeutet jeweils Energie- und Impulserhaltung?