

11. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 20.7.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$. Berechnen Sie:

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte=6+4 Punkte) Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie: wenn $AB = BA$ gilt, dann gilt auch

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

(b) Berechnen Sie $\exp(A) \cdot \exp(B)$ und $\exp(A + B)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte Punkte) Es sei $L: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(q, v) = \frac{\|v\|^2}{2} - q_3.$$

Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung zu L und finden Sie eine Lösung γ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma'(0) = w$ mit $w \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Aufgabe 4 (10 Punkte=4+4+2) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(t) + 2\delta f'(t) + \omega_0^2 f(t) = 0$$

für $\omega_0, \delta > 0$.

- Überführen Sie diese Gleichung mit Hilfe von Bemerkung 9.9 in ein lineares Gleichungssystem erster Ordnung.
- Bestimmen Sie eine Fundamentallösung mit Hilfe von Bemerkung 9.8.
- Skizzieren Sie jeweils eine Lösungen $f(t) \neq 0$ für $\delta > \omega_0$ und $\delta < \omega_0$.