12. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Dieses Übungsblatt wird weder korrigiert noch besprochen. Es gibt daher auch keine Abgabe.

Aufgabe 1 (10 Punkte=3+7 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{f^2(t)}{1+c^2 f^2(t)} \\ f(0) = 1 \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung für $c = 0$ und ihr maximales Definitionsintervall.

(b) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung für $c \neq 0$ und ihr maximales Definitionsintervall.

Aufgabe 2 (10 Punkte=4+6 Punkte) Wir betrachten die Funktion

$$f \colon [0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist auf $[1, \infty)$ Lipschitz-stetig.

(b) f ist auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung $f' = f$. Es sei $F_k \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionenfolge aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff mit

$$F_0(x, t) = x \qquad \text{und} \qquad F_{k+1}(x, t) = x + \int_0^t F_k(x, s)\, ds \qquad \text{für } k \geq 0 .$$

Bestimmen Sie die Funktionen F_k induktiv.

Aufgabe 4 (10 Punkte=2+5+3 Punkte) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f'(t) = f(t)(f(t) - 1)e^{\sin(f(t))}.$$

(a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung mit $f(0) = \frac{1}{2}$ beschränkt ist.

(c) Folgern Sie, dass das maximale Definitionsintervall der Lösung aus (b) ganz $\mathbb{R}$ ist.