2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 11.5.

Aufgabe 1 (10 Punkte=4+2+4 Punkte) Es seien M, N topologische Räume und $S \subset M$ trage die Unterraumtopologie. Zeigen Sie:

(a) Die Inklusionsabbildung $\iota\colon S \to M$, $\iota(p) = p$ ist stetig.

(b) Wenn $f\colon M \to N$ stetig ist, dann ist acuh $f|_S$ stetig.

(c) Eine Abbildung $g\colon N \to S$ ist genau dann stetig, wenn $\iota \circ g\colon N \to M$ stetig ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte=4+3+3 Punkte) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ gegeben. Wir betrachten $[a, c] \subset \mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie.

(a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon [a, c] \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ stetig sind (jeweils bezüglich der Unterraumtopologien).

(b) Zeigen Sie, dass es zu jeder stetigen Funktion $f\colon [a, c] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $F|_{[a,c]} = f$ gilt.

(c) Gilt die Aussage (b) auch für (a, c) anstatt $[a, c]$?

Aufgabe 3 (10 Punkte=6+4 Punkte) Es seien $M = \{0, 1\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, M\}$ sowie $S = \{0\}$, $T = \{1\} \subset M$.

(a) Bestimmen Sie Inneres, Abschluss und Rand jeweils von S und T.

(b) Welche Punkte von M ind Häufungspunkte von S? Welche sind Häufungspunkte von T?

Aufgabe 4 (10 Punkte=4+4+2 Punkte) Es sei M wie in Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M.

(b) Es sei $f\colon M \to M$ gegeben durch $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Bestimmen Sie alle Grenzwerte von f an jedem Häufungspunkt von M.

Hinweis: Sie dürfen Proposition 6.21 nicht verwenden. (Warum?)

(c) Ist f stetig bei 0, bei 1, insgesamt?