3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 18.5.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Bitte wählen Sie für diese und die nächste Aufgabe aus den folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei aus:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

Zeigen Sie dann, dass beides Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind und skizzieren Sie die Mengen $B_1(0)$ im Fall $n = 2$.
Vorschlag: Sprechen Sie sich in der Übungsgruppe ab, damit jede mögliche Kombination mindestens einmal bearbeitet wird.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es seien $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ die von Ihnen gewählten Normen auf $\mathbb{R}^n$. Finden Sie für alle n Konstanten $0 < c_n \leq C_n$ und Vektoren $x_n, y_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &c_n\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C_n\|x\|' \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \\ &c_n\|x_n\|' = \|x_n\|'', \\ &\|y_n\|'' = C_n\|y_n\|'. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte=5+5 Punkte) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g \in C^0([a, b])$. Zeigen Sie

(a) $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, dass $\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b |g(x)|^2 dx = 1$, falls nicht $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$. Benutzen Sie dann die Youngsche Ungleichung 4.35.

(b) $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 4 (10 Punkte=5+2+3 Punkte) Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Wir definieren $\|\cdot\|_2 \colon C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ durch

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf $C^0([a, b])$ definiert.

(b) Bestimmen Sie eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\|f\|_2 \leq C\|f\|_{\text{sup}}$$

für alle $f \in C^0([a,b])$.

(c) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0([a,b])$, so dass $\|f_n\|_{\text{sup}} = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0.$$