4. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 25.5.

Aufgabe 1 (10 Punkte=5+3+2 Punkte) Es sei X ein topologischer Raum. Zu $p \in X$ definieren wir die Menge

$$Z(X,p) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \text{es gibt einen stetigen Weg von } p \text{ nach } x \right\} .$$

(a) Sei $q \in X$ ein weiterere Punkt. Zeigen Sie, dass entweder $Z(X,p) = Z(X,q)$ oder $Z(X,p) \cap Z(X,q) = \emptyset$ gilt.

Hinweis: Überlegen Sie sich analog zu Aufgabe 2a von Blatt 2, dass man stetige Abbildungen $\gamma_i \colon [a_i, b_i] \to X$ für $i = 1, 2$ stetig "verkleben" kann, wenn $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.

(b) In wieviel verschiedene Teilmengen der Form $Z(X,p)$ zerfällt die Menge $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \neq -1\}$? Skizzieren Sie die Menge X und alle Teilmengen der Form $Z(X,p)$.

(c) Es sei jetzt $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass alle Teilmengen $Z(X,p)$ offen und als Teilmengen von X auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es seien M eine Menge und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{P}(M)$ zwei Topologien auf M. Dann ist die Identitätsabbildung $\mathrm{id} \colon (M, \mathcal{O}_1) \to (M, \mathcal{O}_2)$ stetig.

(b) Es seien M, N topologische Räume, $f \colon M \to N$ eine stetige Abbildung und $K \subseteq N$ kompakt, dann ist auch $f^{-1}(K)$ kompakt.

(c) Es seien M ein topologischer Raum und $A, B \subseteq M$ zusammenhängende Teilmengen, dann ist auch der Durchschnitt $A \cap B$ ist zusammenhängend.

Hinweis: Ein Bild für $M = \mathbb{R}^2$ könnte hilfreich sein.

(d) Es seien M ein topologischer Raum und $A, B \subseteq M$ wegzusammenhängende Teilmengen mit $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist auch die Vereinigung $A \cup B$ ist wegzusammenhängend.

Aufgabe 3 (10 Punkte=4+2+2+2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \text{ und} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

aus Bemerkung 7.11 (3).

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f an jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) Sind die partiellen Ableitungen stetig?

(c) Ist die Funktion f selbst stetig?

(d) Existiert die Ableitung bei 0 in Richtung $v = \binom{1}{1}$?

Aufgabe 4 (10 Punkte = 3+2+3+2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \text{ und} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

aus Bemerkung 7.11 (4).

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von g an jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Sind die partiellen Ableitungen stetig?

(c) Berechnen Sie im Punkt $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_{(u,v)}g(0)$ für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Ist $\partial_{(u,v)}g(0)$ linear in $(u,v) \in \mathbb{R}^2$? Begründen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass g bei 0 nicht total differenzierbar sein kann.