5. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 1.6.

Aufgabe 1 (10 Punkte=4+2+4 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $-1 \leq f(x,y) \leq 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt. An welchen Stellen gilt jeweils Gleichheit? Skizzieren Sie beide Mengen.

(b) An welchen Stellen ist f stetig?

(c) Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen existieren und berechnen Sie diese an der Stelle 0.

Aufgabe 2 (10 Punkte=4+4+2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion aus Beispiel 7.17:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\partial_x f$, $\partial_y f$ jeweils auf ganz $\mathbb{R}^2$ und $\partial_x\partial_y f$, $\partial_y\partial_x f$ an der Stelle 0.

(b) Überprüfen Sie, dass $\partial_x f$ und $\partial_y f$ zwar stetig, aber bei 0 nicht total differenzierbar sind.

Hinweis: Warum genügt es die Aussage nur für eine der beiden Funktionen zu zeigen?

(c) Begründen Sie, dass $\partial_x\partial_y f$ und $\partial_y\partial_x f$ bei 0 nicht stetig sein können.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Konstruieren Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y_0),$$
$$\lim_{y\to y_0} f(x_0,y),$$
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{und}$$
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren, die letzten zwei aber an einer Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ nicht übereinstimmen.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Beweisen Sie per Induktion über n, dass

(a) $(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die binomische Formel aus Satz 1.21

(b) Für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$\partial_\alpha x^\beta \Big|_{x=0} = \begin{cases} \alpha! & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$