6. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Auf dieses Blatt gibt es 40 Punkte + 40 Bonuspunkte. Abgabe ist am Mittwoch, den 15.6.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und überprüfen Sie jeweils, ob ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 2 (10 Punkte= 4+2+2+2 Punkte) Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie: $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konvex.

(b) Zeigen Sie: $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist nicht strikt konvex.

(c) Zeigen Sie: der abgeschlossene Normball $D_1^{\|\cdot\|}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ ist konvex.

(d) Geben Sie je ein Beispiel einer Norm an, so dass $D_1^{\|\cdot\|}(0)$ strikt konvex, beziehungsweise nicht strikt konvex, ist. Hierbei heißt „strikt konvex“: für alle $p, q \in D_1^{\|\cdot\|}(0)$ und alle $s \in (0, 1)$ liegt $(1-s)p + sq$ im Inneren von $D_1^{\|\cdot\|}(0)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte=5+5 Punkte) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie:

(a) Wenn $f\colon A \to \mathbb{R}$ konvex ist, dann gilt für alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ und alle $0 \leq t_1, \dots, t_k \leq 1$ mit $t_1 + \cdots + t_k = 1$, dass

$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_k f(x_k).$$

(b) $f\colon A \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $\{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y > f(x)\}$ konvex ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte=5+5 Punkte) Wir identifizieren in dieser Aufgabe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Es sei $v \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) $\partial_v z^k = kz^{k-1} \cdot v \in \mathbb{C}$ (falls $k \leq 0$ sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$),

(b) $\partial_v \exp(z) = v \cdot \exp(z) \in \mathbb{C}$,

wobei hier „$\cdot$“ die komplexe Multiplikation wie in Beispiel 1.34 bezeichne.

Aufgabe 5 (10 Punkte=2+3+2+3 Punkte) Es seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gegeben durch

$$f(z) = z^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

(a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von g und zeigen Sie, dass g die obere Halbebene

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

bijektiv auf den offenen Einheitsball $B_1(0)$ abbildet.

(b) Berechnen Sie den Iterationsschritt $N_f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ im Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen von f und bestimmen Sie $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ so, dass $g(N_f(z)) = h(g(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, für die die linke und rechte Seite der obigen Gleichung definiert sind.

(c) Zeigen Sie: Für $z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} N_f^n(z) = z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} h^n(g(z)) = g(z_0).$$

(d) Bestimmen Sie die drei Teilmengen $A, B, C \subseteq \mathbb{C}$ so, dass

$$N_f^n(z) \to i \iff z \in A$$
$$N_f^n(z) \to -i \iff z \in B$$
$$N_f^n(z) \text{ ist nicht für alle } n \text{ definiert oder divergiert.} \iff z \in C$$

Aufgabe 6 (10 Punkte=5+5 Punkte) Wir betrachten $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R} \mid \det(A) \neq 0\}$. Es sei

$$I\colon \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

die Abbildung, die einem Element sein Matrixinverses zuordnet.

(a) Folgern Sie aus der Cramerschen Regel $A^{-1} = \det(A)^{-1}\mathrm{Adj}(A)$, dass I stetig differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$d_A I(X) = -I(A)XI(A)$$

für alle $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 7 (10 Punkte) Es sei (M, d) ein topologischer Raum und

$$\mathcal{O}_d := \{V \subseteq M \mid \forall p \in V \ \exists r > 0 \ : B_r(p) \subseteq V\}.$$

Beweisen Sie Beispiel 6.13 (3), wonach $\mathcal{O}_d$ die Axiome einer Topologie erfüllt.

Aufgabe 8 (10 Punkte=2+2+2+2+2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $\partial_x f$ und $\partial_y \partial_x f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, dann ist existiert auch $\partial_y f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ und ist stetig.

(b) Eine offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn alle ihre Projektionen $\pi_i(A) \subseteq \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ Intervalle sind.

(c) Eine Funktion $f\colon M \to N$ zwischen zwei topologische Räumen ist genau dann stetig, wenn alle Urbilder von abgschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

(d) Es seien $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann gilt $n^k = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = k} \binom{k}{\alpha}$.

(e) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn alle $f^{-1}((-\infty, c)) \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex sind.