7. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 22.6.

Aufgabe 1 (10 Punkte=3+4+3 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = y^2 - x^2.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die kritischen Werte von f.

(b) Es sei $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f. Finden Sie Parametrisierungen $g_{z,i}\colon I \to \mathbb{R}^2$, I Intervall, für $i = 1, \dots, N$, so dass

$$f^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{i=1}^{N} g_{z,i}(I)$$

(c) Warum ist $f^{-1}(\{z\})$ keine Untermannigfaltigkeit, wenn z kritischer Wert ist?

Aufgabe 2 (10 Punkte= 3+5+2 Punkte) Es sei $n \geq 1$,

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = E_n\}$$
$$\mathrm{S}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$$

Es sei $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gegeben ist durch $f(A) = AA^t$, so dass $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\{E_n\})$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathrm{S}(n)$ ist ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$, die Abbildung f ist eine C^∞ und nimmt Werte in $\mathrm{S}(n)$ an.

(b) $\mathrm{O}(n) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist eineC^∞-Untermannigfaltigkeit.

Hinweis: Man kann die Regularität von $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ in einem Punkt $A \in \mathrm{O}(n)$ auf die Regularität von f im Punkt E_n zurückführen.

(c) Welche Dimension hat $\mathrm{O}(n)$?

Aufgabe 3 (10 Punkte=3+4+3 Punkte) Es sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und $S^n = \|\cdot\|_2^{-1}(\{1\})$.

(a) Konstruieren Sie eine Abbildung von $g\colon \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ indem Sie jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ auf den zweiten Schnittpunkt der Geraden durch $(x,0)$ und e_{n+1} mit S^n abbilden.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $\phi\colon S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ und zeigen Sie, dass g eine Parametrisierung ist.

(c) Setzen Sie die Abbildung ϕ zu einem Diffeomorphismus im Sinne von Definition 7.42 fort.

Aufgabe 4 (10 Punkte=2+5+3 Punkte) Wir betrachten $f, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 - x + 6 - y^2 \\ h(x,y) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass 0 ein regulärer Wert von f ist.

(b) Bestimmen Sie mit der Lagrange-Multiplikatorregel alle kritischen Punkte von $h\big|_{f^{-1}(\{0\})}$.

(c) Prüfen Sie mit Hilfe der modifizierten Hessematrix, ob jeweils ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum vorliegt.