8. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 29.6.

Aufgabe 1 (10 Punkte=2+4+2+2 Punkte) Gegeben seien N Paare $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$. Gesucht ist ein Polynom

$$P_a(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

vom Grad n mit $a = (a_0 \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, das diese Werte möglichst gut beschreibt. Betrachten Sie dazu

$$X = (x_i^{j-1})_{i,j} \in M_{N,n+1}(\mathbb{R}) \quad \text{und } y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $P_a(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, \dots, N$, genau dann wenn

$$X \cdot a = y$$

(b) Die Parameter a bilden genau dann einen kritischen Punkt der Abbildung $F \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(a) = \sum_{i=1}^{N} (P_a(x_i) - y_i)^2,$$

wenn

$$X^t \cdot X \cdot a = X^t \cdot y. \tag{$*$}$$

(c) Das Gleichungssystem $(*)$ hat stets mindestens eine Lösung

(d) Jeder kritische Punkt von F ist globale Minimalstelle.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Es seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und $R \in \mathbb{R}$ mit $R > \|p - q\|$. Wir betrachten die Menge

$$M := \{r \in \mathbb{R}^2 \mid \|r - p\| + \|r - q\| = R\}.$$

Bestimmen Sie die Minima und Maxima der Funktion $h|_M$, dabei sei $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(r) = \|r - p\| \|r - q\|.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $x = \|r - p\|$ und $y = \|r - q\|$ als unabhängige Variablen. Welche Ungleichungen müssen x, y aufgrund der Dreiecksungleichung erfüllen? Warum müssen wir keine zweiten Ableitungen bestimmen?

Aufgabe 3 (10 Punkte=5+5 Punkte) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Funktion

$$h(x) = \langle x, Ax \rangle = x^t \cdot A \cdot x$$

auf der Teilmenge $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Die kritischen Punkte von $h\big|_{S^{n-1}}$ sind genau die Eigenvektoren der Länge 1 der Matrix $A^t + A$. Wie hängen die Lagrange-Multiplikatoren mit den Eigenwerten von $A + A^t$ zusammen?

(b) Vervollständigen Sie die Überlegungen aus (a) zu einem Beweis des Spektralsatzes für reelle selbstadjungierte Matrizen. (LAII-Skript, Satz 2.42: Sie dürfen dabei einzelne Argumente aus dem LAII-Beweis verwenden, aber nicht den Fundamentalsatz der Algebra)

Aufgabe 4 (10 Punkte=2+3+3+2 Punkte) Es sei $R > 0$. Wir betrachten

$$M = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|p - \tbinom{1}{0}\|^2 \cdot \|p - \tbinom{-1}{0}\|^2 = R^2 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass M für jedes R kompakt ist.

(b) Für welche R ist M eine Untermannigfaltigkeit?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von R die kritischen Punkte von $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto y$ auf M.

(d) Skizzieren Sie M für verschiedene R (gern in einem einzigen Bild), so dass jeder mögliche Fall in (b) und (c) vorkommt. Markieren Sie auch die Lage der kritischen Punkte.