9. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 6.7.

Aufgabe 1 (10 Punkte=5+5 Punkte) Es sei $f\colon [0,\infty)\times[0,1]\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y^2}, & \text{für } x\in[0,y],\\ \frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}, & \text{für } x\in[y,2y],\\ 0, & \text{für } x\geq 2y.\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{y\searrow 0} f(x,y)=0,$$
$$\lim_{y\searrow 0}\int_0^1 f(x,y)dx=1,$$

(b) Bestimmen Sie die Funktion $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$g(x)=\sup_{y\in[0,1]} f(x,y)$$

und zeigen Sie, dass sie nicht uneigentlich integrierbar ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Benutzen Sie die Funktion $f\colon(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=x^y$$

um für alle $k\in\mathbb{N}$ und alle $y>-1$ das Integral

$$\int_0^1 x^y\log(x)^k dx$$

mit Hilfe von Satz 8.5 (2) zu berechnen.

Aufgabe 3 (10 Punkte=3+7 Punkte) Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Wir definieren $f\colon M\times M\to[0,\infty]$ durch

$$f(p,q)=\inf\left\{\,L(\gamma)\;\middle|\;\gamma\in C^0([0,1],M),\ \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q\,\right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle p,q gilt $f(p,q)\geq d(p,q)$.

(b) Die Funktion erfüllt die Axiome 6.1 (1)-(3).

Aufgabe 4 (10 Punkte=5+5 Punkte) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es sei $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [c,d]$. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in C^0(U)$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_{\gamma\circ\phi} f ds.$$

(b) Wenn zusätzlich $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [c,d]$, dann gilt für $\alpha \in C^0(U, M_{1,n}(\mathbb{R}))$

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma\circ\phi} \alpha.$$