Universelle Eigenschaften

Vortrag 1: Kategorien und Funktoren (Jonas)

Lineare Algebra
Datum: 28.4.
Sprecher:
In diesem Vortrag geht es darum die Grundbegriffe der Kategorientheorie anhand von Beispielen zu verstehen. Folgen Sie hierzu [4, Kapitel 5].

- Definieren Sie Kategorien anhand von Beispielen und zeigen Sie insbesondere, dass nicht jede Kategorie eine Unterkategorie von **Sets** ist.
- Eine "Abbildung" zwischen zwei Kategorien heißt *Funktor*. Definieren Sie diese an, geben Sie Beispiele an, insbesondere für sogenannte Vergissfunktoren.

Vortrag 2: Was ist eine universelle Eigenschaft? (Jonas)

Lineare Algebra
Datum: 5.5.
Sprecher: Jonas Becker
Folgen Sie [1, Chapter I §5]:

- Definieren Sie initiale und finale Objekte einer Kategorie und zeigen Sie deren Eindeutigkeit.
- Erklären Sie den Satz "We say that a construction satisfies a universal property (or 'is the solution to a universal problem') when it may be viewed as a terminal object of a category."
- Zeigen Sie schließlich, dass diese herangehensweise für Quotienten, Produkte und Koprodukte zielführend ist.

Vortrag 3: Die Kategorie der Gruppen (Mara)

Lineare Algebra
Datum: 12.5.
Sprecher: Julian Kröger
Die folgenden Angaben beziehen sich auf [1, Chapter II].

- Wiederholen Sie Gruppen und diskutieren Sie ein Beispiel. (§1)
- Führen Sie die Kategorien **Grp** und **Ab** ein, deren Objekte (abelsche) Gruppen und Morphismen Gruppenhomomorphismen sind (§3).
- Diskutieren Sie einige Beispiele von Gruppen in diesem Kontext (§4.1).
- Zeigen Sie den Unterschied zwischen der Kategorie der Gruppen und der Kategorie der Mengen auf (Proposition 3.3).

- Erklären Sie warum **Ab** sich besser als **Grp** verhält - diskutieren Sie, zum Beispiel, die Tatsache, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}$ eine Gruppe ist, aber $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}$ nur eine Menge ist (§4.4)

Vortrag 4: Freie Gruppen und universelle Eigenschaften (Mara)

Lineare Algebra
Datum: 19.5.
Sprecher: Annabelle Wagner

Die folgenden Angaben beziehen sich auf [1, Chapter II].

- Motivieren Sie die Idee der Konstruktion von der freien Gruppe $F(A)$: es ist die "natürlichste" Gruppe die die Menge A enthält (§5.1)
- Drücken Sie die heuristische Motivation der obigen Konstruktion durch eine universelle Eigenschaft aus (§5.2)
- Konstruieren Sie die freie Gruppe einer Menge A und zeigen Sie, dass sie die universelle Eigenschaft erfüllt (§5.3)
- Interpretieren Sie die freie Gruppe einer zweielementigen Menge visuell (Example 5.3)

Vortrag 5: Die Kategorie der Ringe und die universelle Eigenschaft der Polynome (Mara)

Lineare Algebra
Datum: 26.5. (Himmelfahrt)
Sprecher: Nelson Paraiso

Die folgenden Angaben beziehen sich auf [1, Chapter III].

- Wiederholen Sie (kommutative) Ringe und diskutieren Sie einige Beispiele (§1)
- Diskutieren Sie insbesondere den Polynomring (§1.3)
- Führen Sie die Kategorie der Ringe ein, deren Objekte Ringe und Morphismen Ringhomomorphismen sind.(§2.1)
- Diskutieren Sie die universelle Eigenschaft von Polynomringen und zeigen Sie, dass diese uns erlaubt eine "Auswertungsabbildung" zu definieren.(§2.2)

Vortrag 6: Die projektive Gerade und das Doppelverhältnis (Mara)

Elementargeometrie
Datum: 2.6.
Sprecher: Lukar Riepl
In diesem Vortrag werden die Grundlagen von Familien von geometrischen Objekten und Paramaterräumen besprochen.

- Führen Sie die projektive Gerade $\mathbb{P}^1$ ein (aus der Vorlesung *Elementargeoemtrie* z.B. in [6])
- Definieren Sie Quadrupel von Punkten in $\mathbb{P}^1$ und deren (universelle) Familien (0.1.1 - 0.1.3 aus [2])

- Diskutieren Sie die Klassifikation von Quadrupel von Punkten in $\mathbb{P}^1$ bis auf projektive Äquivalenz (0.1.4 - 0.1.8 aus [2])
- Konstruieren Sie die tautologische Familie von Quadrupeln, zeigen Sie ihre universelle Eigenschaft und erklären Sie ihre geometrische Signifikanz. (0.1.9 - 0.1.12 from [2])

Vortrag 7: Das Tensorprodukt und die Tensoralgebra (Jonas)

Lineare Algebra
Datum: 16.6. (Fronleichnam)
Sprecher: Benjamin Brotz
In diesem Vortrag werden die universellen Eigenschaften des Tensorprodukts, welches Sie vielleicht schon aus der linearen Algebra kennen, und der Tensoralgebra besprochen. Die Kapitelangaben im Folgenden beziehen sich auf [4, Kapitel 3].

- Wiederholen Sie das Tensorprodukt für Vektorräume aus der linearen Algebra (Kapitel 3.2) und zeigen Sie dessen universelle Eigenschaft.
- Definieren Sie assoziative Algebren und deren Morphismen und geben Sie einige bekannte Beispiele aus der linearen Algebra und/oder der Analysis an. (Kapitel 3.8)
- Definieren Sie die Tensoralgebra und zeigen Sie deren universelle Eigenschaft (Kapitel 3.8)

Vortrag 8: Ideale, die äußere Algebra und die Determinante (Jonas)

Lineare Algebra
Datum: 23.6.
Sprecher: Nick Burk
Sie können den folgenden Quellen folgen: [4, Kapitel 3 + Übungen], [5]

- Definieren Sie die äußere Algebra und zeigen Sie deren universelle Eigenschaft.
- Erklären Sie, dass man die Determinante als ein Element der äußeren Algebra verstehen kann und zeigen Sie auch ihre universelle Eigenschaft.

Vortrag 9: Der algebraische Abschluss eines Körpers als Gegenbeispiel (Mara)

Algebra und Zahlentheorie
Datum: 30.6.
Sprecher: Benjamin Gerhards

In diesem Vortrag werden wir sehen, dass nicht alles durch eine universelle Eigenschaft beschrieben werden kann. Die Quelle für dieses Seminar ist ihr Lieblings- Algebra and Zahlentheorie Skript - wir benutzen [7], Sie können aber gerne ein anderes verwenden. Auch [1, Chapter VII, §2] könnte hilfreich sein.

- Definieren Sie algebraische Körpererweiterungen mit einigen Beispielen. (z.B. Kapitel 5 in [7])
- Führen Sie algebraische Abschlüsse von Körpern und formulieren Sie das Theorem, dass jeder Körper einen algebraischen Abschluss besitzt. (Satz 5.16 in [7])

- Erklären Sie, dass algebraische Abschlüsse eines Körpers eindeutig bis auf Isomorphie sind - aber nicht bis auf einen Eindeutigen Isomorphismus - und warum das bedeutet, dass algebraische Abschlüsse keine universelle Eigenschaft erfüllen. (Kapitel 8, Existenz von Homomorphismen und Korollar 8.11 from [7])

References

[1] P. Aluffi. *Algebra. Chapter 0,* American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Volume 104, 2009

[2] J. Kock, O. Vainsencher. *An Invitation to Quantum Cohomology. Kontsevich's Formula for Rational Plane Curves,* Birkhäuser, Progress in Mathematics Volume 249, 2007

[3] M. Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie* Springer, 2017

[4] S. Waldmann. *Lineare Algebra 2* Springer, 2022

[5] O. Anderson. *Personal Notes on Linear Algebra*

[6] A. Huber-Klawitter. `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss21/elgeom21.pdf`

[7] A. Huber-Klawitter. `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws21/azt/algebra21.pdf`

[8] A. Martin-Pizarro. `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/palacin/lehre/SoSe20/Top/Topo.pdf`