

Seminar: Geometrische Mechanik im Sommersemester 2022

Vortrag 1: Geometrische Optik I

Vortrag 2: Geometrische Optik II

Vorwissen: *Analysis*

Datum: 18.4., 25.4.

Material: [2, 1.1] und [2, 1.2.-1.3.]

Fermats Prinzip sagt aus, dass ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten immer als die optisch kürzeste Verbindung realisiert ist. Aus mathematischer Perspektive bedeutet dies, dass der Weg eines Lichtstrahls durch ein Variationsprinzip gegeben ist und somit durch eine Lagrangefunktion. Aus dieser Beobachtung lassen sich bereits viele Beobachtungen herleiten, wie die Eikonalgleichung, das Brechungsgesetz und die Huygens'sche Wellenfrontinterpretation von Licht. Das Variationsprinzip ist zu dem noch äquivalent zu der sogenannten Hamiltonschen Formulierung der Strahlenoptik. Diese hat den Vorteil, dass die Gleichungen viele Symmetrien besitzen, die man beim Lösen verwenden kann.

Vortrag 3: Klassische Mechanik: eine Einführung

Vorwissen: *Analysis*

Datum: 2.5.

Sprecher:

Material: [3, 2.1-2.3]

Man kann die Newtonschen Axiome der klassischen Mechanik nun auch durch Variationsprinzipien erklären und die Beobachtungen aus der geometrischen Optik auf diese anwenden. Man kommt schnell zur Definition von symplektischen Vektorräumen. Diese sind Vektorräume mit einer schiefsymmetrischen Bilinearform. Symplektische Räume haben immer zugehörige Symmetrien, die man nun benutzt um die mechanischen Gleichungen zu manipulieren und schließlich auch zu lösen.

Vortrag 4: Differentialgeometrische Grundlagen

Vorwissen: —

Datum: 9.5

Sprecher: Große/Schnitzer

Material:—

Vortrag 5: Ideale Flüssigkeiten und ihre Dynamik

Vorwissen: *Differentialgeometrie, Analysis*

Datum: 16.5.

Sprecher:

Material: [2, 3.5]

Eine ideale Flüssigkeit ist eine inkompressible Flüssigkeit, das heißt, dass sich ihr Volumen trotz äußerer Kräfte nicht ändert. Der Fluss von idealen Flüssigkeiten lässt sich effektiv mit differentialgeometrischen Methoden durch die Eulergleichung beschreiben. Mit Hilfe des geometrischen Standpunkts lassen diese sich vereinfachen und durch Ausnutzen von Symmetrien auf einfachere Gleichungen zurückführen.

Vortrag 6: Symplektische Mannigfaltigkeiten

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 23.5.

Sprecher:

Material: [4, 3.1 und 3.2.1]

Deutet man die Hamiltonsche Mechanik differentialgeometrisch, dann ergibt sich das Konzept einer symplektischen Mannigfaltigkeit, diese sind die geometrischen Verallgemeinerungen des Phasenraums \mathbb{R}^{2N} (Raum der Orte und Impulse). Als wichtigstes Beispiel in der Mechanik treten Kotangentenbündel von beliebigen Mannigfaltigkeiten auf.

Vortrag 7: Liegruppen, Liealgebren und ihre Wirkungen

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 6.6.

Sprecher:

Material: [4, 3.3.1]

Symmetrien werden in der Differentialgeometrie durch Liegruppen beschrieben. Das sind Gruppen, die zusätzlich noch glatte Mannigfaltigkeiten sind und als solche haben sie auch Tangentialräume etc. Der Tangentialraum am Einselement der Gruppe trägt immer die Struktur einer sogenannten Liealgebra.

Vortrag 8: Impulsabbildungen, das Noethertheorem und Phasenraumreduktion

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 13.6.

Sprecher:

Material: [4, 3.3.2-3.3.3]

Wirkt eine Liegruppe auf eine symplektische Mannigfaltigkeit, dann gibt es unter Umständen eine sogenannte Impulsabbildung, welche die Gruppenwirkung erzeugt. Das Noethertheorem sagt nun aus, dass die Impulsabbildung eine Erhaltungsgröße liefert. Außerdem kann man sie verwenden um eine neue symplektische Mannigfaltigkeit zu konstruieren, welche die Dynamik des gleichen physikalischen Problems beschreibt. Das ist die sogenannte Phasenraumreduktion.

Vortrag 9: Das sphärische Pendel

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 20.6.

Sprecher:

Material: [1, IV], [2, 2.5]

Das sphärische Pendel wird mathematisch durch eine Punktmasse beschrieben, die sich auf einer Sphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ bewegt und sich in einem Schwerfeld befindet. Mit den geometrischen Methoden aus den vorherigen Kapiteln lassen sich Symmetrien und Erhaltungsgrößen finden, die man dazu benutzt um die Bewegung der Punktmasse auf eine ODE in einer Variable zurückzuführen.

Vortrag 10: Resonanzen und S^1 -Reduktion I

Vortrag 11: Resonanzen und S^1 -Reduktion II

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 27.6., 11.7.

Sprecher:

Material: [2, 4.1-4.2] und [2, 4.3-4.4]

Resonante gekoppelte harmonische Oszillatoren spielen eine sehr große Rolle in der Physik, z.B. in der Kernphysik, der Molekülphysik und sogar bei Quantencomputern. Mathematisch lassen sich gekoppelte Oszillatoren als ein Hamiltonsches System in \mathbb{C}^2 anschaulich beschreiben. Nach dem Finden von geeigneten Symmetrien und den zugehörigen Erhaltungsgrößen lassen sich diese sehr gut mit Hilfe von Kummer-Flächen geometrisch beschreiben.

Vortrag 12: Das elastische sphärische Pendel

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 11.7.

Sprecher:

Material: [2, 5]

Das elastische sphärische Pendel ist eine Punktmasse, die mit einer Feder an einem Punkt verbunden ist und sich in einem Schwerfeld befindet. Dieses System trägt nun gewisse Eigenschaften von dem sphärischen Pendel, aber auch Resonanzphänomene.

Vortrag 13: Der freie starre Körper

Vorwissen: *Differentialgeometrie*

Datum: 18.7.

Sprecher:

Material: [3, 15]

Bis jetzt haben wir Bewegungen immer nur von Punktmassen beschrieben, also eine Masse ist mathematisch auf einen Punkt konzentriert, was in vielen Fällen eine sehr gute Näherung ist. Betrachtet man nun einen starren Körper, dann treten neue Phänomene auf, wie zum Beispiel Eigenrotationen, die sich aber auch mit geometrischen Methoden, in diesem Fall mit Liegruppen, effektiv beschreiben lassen.

References

- [1] L.M. Bates, R.H.Cushman. *Global Aspects of classical Integrable Systems* Birkäuser
- [2] D.D. Holm. *Geometric Mechanics Part I: Dynamics and Symmetry* Imperial College Press
(<https://www.ma.imperial.ac.uk/~dholm/classnotes/HolmPart1-GM.pdf>)
- [3] J.E. Marsden, T.S. Ratiu *Introduction to Mechanics and Symmetry* Springer
- [4] S. Waldmann *Poissongeometrie und Deformationsquantisierung: Eine Einführung* Springer