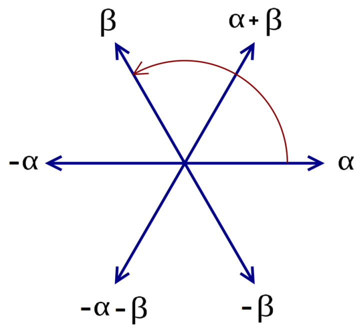
Prof. Dr. Sebastian Goette
Thorsten Hertl

Proseminar im SoSe 23
Darstellungstheorie von Matrixgruppen



(Lie-)Gruppen treten häufig als Symmetrien oder Automorphismen von geometrischen Strukturen auf und sind daher aus der modernen Mathematik nicht mehr wegzudenken. Eine wichtige Klasse von Gruppen bilden die *Matrixgruppen*, also abgeschlossene Untergruppen der Gruppe aller invertierbaren Matrizen. Diese Klasse ist so groß, sodass sie alle in der Praxis wichtigen Gruppen enthält, aber konkret genug, sodass sie mit den gängigen Methoden ohne wesentlichen technischen Aufwand oder Vorkenntnisse aus der Differentialgeometrie studiert werden zu können.

Eine zusammenhängende Matrixgruppe heißt *einfach*, wenn sie keinen nicht-trivialen Normalteiler enhält. Einfache Matrixgruppen bilden mehr oder weniger die Atome von zusammenhängenden Matrixgruppen. Überrachenderweise lassen sich einfache Matrixgruppen klassifizieren und Ziel dieses Seminars ist die Klassifikation einfacher Matrixgruppen zu verstehen. Wir werden auf dem Weg dahin die nötigen Konzepte lernen und anweden: Matrixgruppen, Lie-Algebren, Darstellungen, maximale Tori, Wurzelsysteme, Weyl-Gruppen und Dynkin Diagramme. Desweiteren werden wir in diesem Seminar viel Wert auf das Besprechen von Beispielen legen.

Das Seminar richtet sich an ambitionerte Bachelorstudenten mit Spaß und Interesse ihr gelerntes Wissen aus Analysis II mit linearer Algebra zu kombinieren und anzuwenden. Benötigte Kenntnisse aus der (mengentheoretischen) Topologie werden bei Bedarf eingeführt. Die Hauptquelle dieses Seminars ist [1]. In Kapitel 10 - 12 von [1] wird von allgemeinen Liegruppen gesprochen, diese können ohne Gefahr durch das Wort Matrixgruppen ersetzt werden.

Eine erste Vorbesprechung findet statt am

Mittwoch, den 08 Frebuar 2023, SR 218, Ernst-Zermelo-Str. 1, 14:00.

Vorläufiger Vortragsplan

Vortrag 01: Matrixgruppen und Gruppenhomomorphismen, [17.4] §1.4, §1.7, §1.9
Besprechen Sie alles aus §1.4 und §1.7. Besprechen Sie außerdem Gruppenwirkungen, insbesondere Darstellungen.

Vortrag 02: Beispiele zu Matrixgruppen, [24.4] §1.5, §1.9
Besprechen Sie die Beispiele $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ und $Sp(n)$, sowie Beispiel 1.63.

Vortrag 03: Die Exponentialfunktion, [08.5] §2.1, §2.2, §2.4
Diskutieren Sie §2.1 mit ausgewählten Beweisen - das meiste funktioniert wie in Analysis I. Erklären Sie Prop 2.5, aber ohne Beweis. Zeigen Sie $\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}$ und berechnen Sie die Exponentialfunktion eines Jordanblockes. Besprechen Sie §2.4.

Vortrag 04: Lie-Algebren I, [15.5] §3.1 - Pia Grähr
Ein Großteil dieses Vortrags sind Definitionen von Konzepten, die in ähnlicher, aber anderer Art und Weise schon in der linearen Algebra auftauchen. Besprechen Sie alles aus §3.1.

Vortrag 05: Lie-Algebren II, [22.5] §3.2
Geometrisches Gegenstück zum vorherigen Vortrag. Besprechen Sie alles. Wenn nicht genug Zeit bleibt, kann der Beweis von Prop 3.16 weggelassen werden.

Vortrag 06: Beispiele von Lie-Algebren, [05.6] §3.3 - Philip Hagenlocher
Besprechen Sie die mindestens die Beispiele $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ und $\mathfrak{sp}(n)$.

Vortrag 07: Maximale Tori I, [12.6] §10.1, §10.2 - Zamir Caci
Geben Sie die Definition (maximaler) Tori, beweisen Sie Prop 10.3 und Thm 10.4. Es scheint mir besser Prop 10.5 vor Thm 10.4 zu nennen - formeller Beweis nicht notwendig. Beweisen Sie Theorem 10.11 und folgern Sie Theorem 10.12.

Vortrag 08: Maximale Tori II, [19.6] §10.2, §10.3, §10.4 - Lennard Dufner
Nennen Sie Prop 11.10 und Thm 10.13 (letzteres ist aus LA bekannt), sowie die Lie-Algebren Version Thm 10.15. Beweisen Sie als Anwendung, dass die Exponentialfunktion für kompakte Matrixgruppen surjektiv ist. Definieren Sie $N_G(T)$, beweisen Sie Lemma 10.20 und $N_G(T)_1 = T$ unter Annahme von Thm 10.19. Beweisen Sie Theorem 10.21. Wenn die Zeit reicht, diskutieren Sie außerdem §10.4.

Vortrag 09: Zentrum und Adjungierte Darstellung, [26.6] §11.1, §11.2, §11.3 - Erik Hirzler
Diskutieren Sie das Ad-invariante Produkt auf $\mathfrak{u}(n)$ (nicht zu ausführlich! warum reell und wieso ad-invarianz die richtige Definition ist) und folgern Sie Thm 11.2. Beweisen Sie Thm 11.5, Prop 11.7 und besprechen §11.3 bis (einschließlich) Prop 11.14.

Vortrag 10: Halb-einfache Zerlegungen, [3.7] §11.3, §11.4 - Hannes Carl Gaißer
Beweisen Sie Proposition 11.15 und 11.16. Zeigen Sie, dass $G/Z(G)$ ein triviales Zentrum hat (Thm 11.17) und beweisen Sie, dass jede Lie Algebra sich in Ideale zerlegen lässt (Thm 11.19) und folgern Sie die "globale" Version Thm 11.20.

Vortrag 11: Wurzelsysteme der Adjungierten Darstellung, [10.7] §11.5
Definieren sie Wurzel(paare) und ihre Vektorräume. Erläutern Sie Thm 11.21 und Thm 11.22. Beweisen Sie Prop 11.23 und formulieren Sie Prop 11.24 ohne Beweis. Besprechen Sie danach einige der anschließenden Beispiele.

Vortrag 12: Wurzelsysteme, Dynkin Diagramme, [17.7] §12 - Thorsten Hertl

Literatur

[1] Andrew Baker, *Matrix groups - An introduction to Lie group theory*, Springer Undergrad. Math. Ser., London: Springer, 2002.

[2] Kristopher Tapp, *Matrix groups for undergraduates*, Student Mathematical Library, American Mathematical Society (AMS), 2016.

[3] Morton L. Curtis, *Matrix Groups*, Universitext, Springer-Verlag, 1979.