Anwesenheitsübung zur Vorlesung Toplogie
im Sommersemester 2023 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1 Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(1) (V, d_f) ist ein metrischer Raum.

(2) Es sei $d_n(x,y) = \|x-y\|$ die übliche Metrik. Die Identität $\mathrm{id}_V \colon (V, d_f) \to (V, d_n)$ ist stetig, nicht jedoch $\mathrm{id}_V \colon (V, d_n) \to (V, d_f)$.

Aufgabe 2 Es seien X und Y beliebige Mengen. Zeigen Sie:

(1) Es sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ die diskrete Topologie, und es sei $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$ die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F \colon (X, \mathcal{O}_\delta) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G \colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_K)$ stetig.

(2) Es seien $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ beliebige Topologien auf X und Y. Falls für jeden beliebigen topologische Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G \colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, dann ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie.

Aufgabe 3 Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Überlegen Sie sich, dass f Abbildungen

$$\begin{aligned} f^{-1} &\colon \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X \\ (f^{-1})^{-1} &\colon \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}\mathcal{P}Y \end{aligned}$$

induziert, dass $\mathcal{O}_X \in \mathcal{P}\mathcal{P}X$, dass $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O}_X)$ eine Topologie auf Y induziert, und wie $\mathcal{O}_Y$ und $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O}_X)$ miteinander zusammenhängen, wenn f stetig ist.