1. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 27.4. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Es sei $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen, dann ist f^{-1} auch stetig.

(2) Die Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}\mathbb{N}$, die gegeben ist durch

$$\mathcal{O} = \{A \in \mathcal{P}\mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich}\} \cup \{\mathbb{N}\},$$

definiert eine Toplogie auf $\mathbb{N}$.

(3) Für $X = \{a,b\}$ definiert $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ eine Topologie.

(4) Für einen metrischen Raum (X,d) definiert die Abbildung $d\colon \mathcal{P}X \times \mathcal{P}X \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$d_{\mathcal{P}}(A,B) = \inf_{a\in A,\ b\in B} d(a,b),$$

eine Metrik auf $\mathcal{P}X$.

(5) Es sei X ein toplogischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $x \in \mathring{A}$ genau dann, wenn A eine Umgebung von x ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es sei X eine beliebige Menge, und es sei

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\} \ \subseteq\ \mathcal{P}X$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X definiert. Diese Topologie heißt auch *koendliche* Topologie.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 5+2+3 Punkte) Es sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r \frac{a}{b}$$

mit $r,a,b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, so dass p, a und b paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall defineren wir die *p-adische Bewertung* von q durch $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die p-adische Metrik

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p$$

auf $\mathbb{Q}$ induziert.

(1) Zeigen Sie, dass d_p wirklich eine Metrik ist, also Axiome (1)-(3) aus Definition 1.1 erfüllt.

(2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\}$$

und „$<$ “ kann nur auftreten, wenn $d_p(x, y) = d_p(y, z)$.

(3) Folgern Sie aus (2): Für alle $x, y \in (\mathbb{Q}, d_p)$ und alle $\epsilon, \delta > 0$ seien $B_\delta(x)$ und $B_\epsilon(y)$ metrische Bälle bezüglich d_p, dann sind $B_\delta(x)$ und $B_\epsilon(y)$ entweder disjunkt, oder einer der Bälle enthält den anderen.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen toplogische Räumen.

(1) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn f an jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

(2) Es seien d, d' Metriken auf X beziehungsweise Y, so dass $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{d'}$. Zeigen Sie, dass Definition 1.16(1) dann zu Definition 1.3 äquivalent ist.