10. (UND LETZTES) ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Topologie im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 13.7. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Es seien G, H Gruppen, dann ist G ein Normalteiler in $G * H$.

(2) Für zwei Gruppen G, H gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G * H \to G$ mit $\phi \circ \iota_G = \mathrm{id}_G$.

(3) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$\psi\colon \coprod_{i \in I} G_i \to \prod_{i \in I} G_i$$

mit $\pi_i = \psi \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.

(4) Es sei I endlich. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

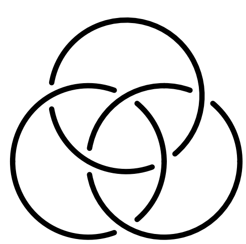
$$\chi\colon \prod_{i \in I} G_i \to \coprod_{i \in I} G_i$$

mit $\chi \circ \eta_i = \iota_i$ für alle $i \in I$, dabei sei $\pi_i \circ \eta_i = \mathrm{id}_{G_i}$ und $\pi_j \circ \eta_i = e$ für $i \neq j$.

(5) Es seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien in denen je zwei Objekte ein Koprodukt haben und es sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es für all A, B einen Morphismus

$$\mathcal{F}(A \sqcup B) \to \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.44, dass die Borromäischen Ringe R_1, R_2, $R_3 \subset \mathbb{R}^3$ sich im umgebenden $\mathbb{R}^3$ nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse $[\gamma] \in \pi_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ eines Weges γ, der R_3 parametrisiert.



Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei

$$X = \bigcup_{n\geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos\phi + 1, \sin\phi) \,\middle|\, \phi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass X überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede $\mathbb{Z}$-wertige Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ genau a_n-mal umläuft.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Schreiben Sie $\mathbb{R}P^2 = S^1 \cup_\phi D^2$ wie in Aufgabe 2 von Blatt 8 mit $\phi\colon S^1 \ni z \mapsto z^2 \in S^1$. Seien $x, y \in \mathbb{R}P^2$ Bilder zweier Punkte im inneren von D^2.

(1) Zeigen Sie , dass der Raum $\mathbb{R}P^2 \setminus \{y\}$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ ist.

(2) Bestimmen Sie $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x)$ mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen.
Hinweis: Verwenden Sie die offenen Mengen $\mathbb{R}P^2 \setminus \{y\}$ und $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$.