2. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 4.5. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Die Klumpentopologie erfüllt (T3).

(2) Aus (T4) folgt (T1).

(3) Die koendliche Topologie auf $\mathbb{N}$ erfüllt (T1).

(4) Die koendliche Topologie auf $\mathbb{N}$ erfüllt (T2).

(5) Jeder metrische Raum erfüllt (A2).

Aufgabe 2 (10 Punkte = 5+3+2 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien A, A_0 und A_1 abgeschlossene Teilmengen von X, und A_0 und A_1 seien disjunkt. Zeigen Sie:

(1) die Funktion $d_A \colon X \to \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ ist stetig;

(2) es gilt $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;

(3) die Funktion $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$ hat die in Satz 1.25 (3) geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen,* wenn es eine Menge $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P \right\} . \tag{*}$$

Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen,* wenn $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}_Z$ aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie.*
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen:

(1) $\emptyset$ und $\mathbb{C}^n$ sind Zariski-abgeschlossen;

(2) wenn $A_1, \dots, A_k$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A_1 \cup \dots \cup A_k$ (betrachten Sie hierzu geeigenete Produkte der definierenden Polynome);

(3) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A .$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf einer Menge Y. Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert genau dann, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_i \in S$ für alle $i \geq i_0$.

(2) Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ das Urbild $f^{-1}(S)$ in X offen ist.