3. Übungsblatt zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 11.5. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein (A1)-Raum und es sei $A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$, dann erfüllt $(X, \mathcal{O})$ auch (A2).

(2) Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum, dann hat jeder Filter höchstens einen Grenzwert.

(3) Wenn jeder Filter auf $(X, \mathcal{O})$ höchstens einen Grenzwert hat, dann ist $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum.

(4) Es sei X der Raum aus Bemerkung 1.41, dann hat jede Teilmenge $A \subset X$ ein bezüglich $\prec$ maximales Element.

(5) Jeder Filter $\mathcal{F}$ einer Menge X wird durch eine Folge induziert.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Betrachte den Raum $X = [0,1]^2$ mit

$$d\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.

(2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt $(X, \mathcal{O}_d)$?

Aufgabe 3 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der von ihr induzierte Filter gemäß Beispiel 1.43 (4). Zeigen Sie:

(1) Der Filter $\mathcal{F}$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die Folge $(x_n)_n$ gegen x konvergiert.

(2) Der Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn er ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$ ist.

(3) $\mathcal{F}$ ist der Bildfilter des koendlichen Filters auf $\mathbb{N}$ aus Beispiel 1.43 (3) unter der Abbildung $\mathbb{N} \to X$ mit $n \mapsto x_n$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 3+3+4 Punkte) Betrachte

$$\mathcal{F} = \left\{\, U \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \text{es gibt } \delta > 0, \text{ so dass } (0, \delta) \subset U \,\right\} \subset \mathcal{P}\mathbb{R}\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein freier Filter auf $\mathbb{R}$ ist.

(2) Konvergiert $\mathcal{F}$ in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

(3) Sei jetzt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Übersetzen Sie die Aussage „$f\mathcal{F}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$“ in die Sprache der Analysis I.