4. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 18.5. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) $\prod_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R}$ erfüllt (A1). Dabei tragen die Faktoren $\mathbb{R}$ jeweils die Standardtopologie.

(2) Es sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorffräumen und $K \subseteq Y$ kompakt. Dann ist auch $F^{-1}(K)$ kompakt.

(3) Es sei X quasikompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A mit der Unterraumstopologie auch quasikompakt.

(4) Die Abbildung $F\colon [0,1) \to \mathbb{C}$ mit $F(t) = e^{2\pi i t}$ ist eine Einbettung.

(5) Die Abbildung $F\colon (0,1) \to \mathbb{C}$ mit $F(t) = e^{2\pi i t}$ ist eine Einbettung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Manchmal möchte man Funktionen durch Fallunterscheidung definieren und sicherstellen, dass die so definierte Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Dazu seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und $A_1, \dots, A_k \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$. Es sei $f\colon X \to Y$ gegeben, so dass $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ für alle $i = 1, \dots, k$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf A_i ist. Zeigen Sie, dass dann $f\colon X \to Y$ ebenfalls stetig ist.

Hinweis: Sie können benutzen, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 3+3+2+2 Punkte) Es sei X eine Menge und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von *Halbmetriken*, das heißt, $d_n\colon X \times X \to [0,\infty]$ erfüllt die Axiome (2) und (3) aus Definition 1.1. und es gilt $d(x,x) = 0$ für alle $x \in X$. Außerdem existiere zu x, $y \in X$ mit $x \neq y$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d_n(x,y) > 0$. Dann definieren wir $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ durch

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}\, d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)} \;,$$

wobei wir $\frac{2^{-n}\cdot\infty}{1+\infty} = 2^{-n}$ setzen. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung d ist eine Metrik auf X.

(2) Eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left\{\, B_{0,\epsilon}(x) \cap \dots \cap B_{n,\epsilon}(x) \;\middle|\; x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \epsilon > 0 \,\right\} ,$$
$$\text{wobei} \qquad B_{k,\epsilon}(x) = \left\{\, y \in X \;\middle|\; d_k(x,y) < \epsilon \,\right\} .$$

(3) Eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{S} = \left\{ B_{n,\epsilon}(x) \;\middle|\; x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \epsilon > 0 \right\} .$$

(4) Das topologische Produkt abzählbar vieler metrischer Räume ist metrisierbar.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es sei I eine Menge und X ein topologischer Raum. Wir identifizieren $\mathrm{Abb}(I, X)$ mit $\prod_{i \in I} X$ so, dass

$$\mathrm{Abb}(I, X) \ni (f\colon I \to X) \longmapsto (f(i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X .$$

Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{Abb}(I, X)$ konvergiert genau dann bezüglich der Produkttopologie gegen eine Abbildung $f\colon I \to X$, wenn sie punktweise konvergiert, das heißt, wenn

$$\lim_{n \to \infty} f_n(i) = f(i) \qquad \text{für alle } i \in I .$$

(2) Sei nun X ein (T1)-Raum. Die obige Folge konvergiert genau dann bezüglich der Box-Topologie, wenn sie punktweise konvergiert und zusätzlich eine endliche Teilmenge I_0 und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$f_n(i) = f(i) \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } i \in I \setminus I_0 .$$

Falls X ein metrischer Raum ist, ist die Box-Topologie für unendliche I sogar wesentlich feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 4 von Blatt 2 verwenden.