5. Übungsblatt (Pfingstblatt) zur Vorlesung Topologie im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Auf diesem Übungsblatt gibt es 40 Punkte + 40 Bonuspunkte. Abgabe ist am Dienstag, den 6.6. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Die disjunkte Vereinigung beliebig vieler Kompakta ist kompakt.

(2) Es sei X quasikompakt, Y Hausdorffsch und $f\colon X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung, dann ist f ein Homöomorphismus.

(3) Eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X, gesehen als Abbildung $x_\bullet\colon \mathbb{N} \to X$, lässt sich genau dann stetig durch $x_\infty \in X$ auf die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{N}'$ fortsetzen, wenn $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen x_∞ konvergiert.

(4) Der Raum X aus Beispiel 1.28 ist lokalkompakt.

(5) Die Inklusionsabbildungen $[n, n+1) \to \mathbb{R}$ induzieren einen Homöomorphismus $\coprod_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1) \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann Hausdorffsch ist, wenn die Diagonale

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

in $X \times X$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Betrachten Sie den Raum $X = [0, 1]^2$ mit der Topologie aus Aufgabe 2 von Blatt 3.

(1) Geben Sie einen Homöomorphismus $X \to \coprod_{i\in[0,1]}[0, 1]$ an.

(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es bezeichne ℓ^∞ den Raum der beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(1) Die Einschränkungsabbildung $r\colon C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \ell^\infty$ ist bijektiv.

(2) Wir versehen ℓ^∞ und $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R})$ jeweils mit der Supremumsmetrik. Dann ist r eine Isometrie.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es seien X, Y quasikompakt, und $\mathcal{U}$ sei eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Zeigen Sie:

(1) Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung U_x von x, so dass $U_x \times Y$ von endlich vielen Elementen aus $\mathcal{U}$ überdeckt wird.

(2) Es existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

Aufgabe 6 (10 Punkte) Seien X, Y Hausdorff-Räume, X sei kompakt, und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $F(X) \subset Y$ kompakt, versehen mit der Unterraumtopologie, ist.

Aufgabe 7 (10 Punkte) Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.

Aufgabe 8 (10 Punkte) Wir betrachten den Raum $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, versehen mit der Topologie zur Basis

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = &\left\{ B_r(p) \;\middle|\; p \in B_1(0) \text{ und } 0 < r \leq 1 - \|p\| \right\}\\ &\cup \left\{ B_r\big((1-r)p\big) \cup \{p\} \;\middle|\; p \in S^1 \subset X \text{ und } 0 < r < 1 \right\} .\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Für alle $p \in S^1 \subset X$ ist die Funktion $f_p\colon X \to [-1,1]$ mit

$$f_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = p \text{ und} \\ \dfrac{\langle q, q-p\rangle}{\langle p, q-p\rangle} & \text{für } q \neq p \end{cases}$$

stetig auf X und erfüllt $\big\langle q-p, q-f_p(q)\,p\big\rangle = 0$. Sie nimmt für alle $r \in (0,1]$ auf dem Kreis mit Radius r um $(1-r)p$ den Wert $1-2r$ an, außer im Punkt p.

(2) Der Raum X ist vollständig regulär.

(3) Der Raum X hat eine abzählbare dichte Teilmenge $Q = B_1(0) \cap \mathbb{Q}^2$ und erfüllt (A1), aber nicht (A2).

(4) Der Raum X ist nicht normal.

(5) Lässt sich X in einen normalen Raum einbetten?

Hinweis: Benutzen Sie in (1) den Satz des Thales. Zeigen Sie zu (4), dass jede reellwertige Funktion auf dem abgschlossenen Unterraum $S^1 \subset X$ stetig ist, sich aber nicht alle diese Funktionen stetig auf X fortsetzen lassen. Sie dürfen verwenden, dass $\mathrm{Abb}(S^1, \mathbb{R})$ eine größere Kardinalität hat als $\mathrm{Abb}(Q, \mathbb{R})$.