6. Übungsblatt zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 15.6. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Sei $h \in \mathbb{Q}$. Definiere eine Relation $\sim$ auf $S^1 \subset \mathbb{C}$ durch

$$z \sim w \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ e^{2\pi i h k} z = w.$$

Dann ist $S^1/\sim$ normal.

(2) Sei $\sim$ wie in (1) für $h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist $S^1/\sim$ ein (T1)-Raum.

(3) Sei $f \colon X \to Y$ surjektiv und Y trage die Quotiententopologie. Wenn $f^{-1}(\{y\})$ für alle $y \in Y$ abgeschlossen ist, ist Y ein (T1)-Raum.

(4) Sei X normal und sei $f \colon X \to Y$ wie in (3). Wenn Bilder abgeschlossener Teilmengen von X in Y stets abgeschlossen sind, dann ist Y ein (T4)-Raum.

(5) Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$, dann ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn alle X_i wegzusammenhängend sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$, und sei $f \colon V \to X$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf V. Zeigen Sie:

(1) die Topologie $\mathcal{O}_X$ ist genau die von der Verklebungstopologie auf $X \subset X \cup_f Y$ induzierte Unterraumtopologie;

(2) wenn V abgeschlossen ist und X und Y beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für $X \cup_f Y$.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 1+2+4+2+1 Punkte) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \qquad \iff \qquad (y_1, y_2) = \left(r x_1, \frac{x_2}{r}\right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Sei $X = \mathbb{R}^2/\sim$, sei $Y := \big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)/\sim$, und sei $Z := \big(\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})\big)/\sim$.

(1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im $\mathbb{R}^2$.

(2) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf X, z.B., indem Sie eine Basis angeben.

(3) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt X?

(4) Zeigen Sie, dass Y zum Raum aus Beispiel 1.28 homöomorph ist.

(5) Zu welchem bekannten Raum ist Z homöomorph?

Aufgabe 4 (10 Punkte = 2+4+4 Punkte) Sei

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x \neq 0 \right\} \cup \big(\{0\} \times [-1, 1] \big) \quad \subset \quad \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ induzierten Unterraumtopologie.

(1) Skizzieren Sie X.

(2) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

(3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von X.