7. Übungsblatt zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 22.6. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung und Y trage die Quotiententopologie. Dann sind Bilder offener Mengen wieder offen.

(2) Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist $f \circ \cdot\colon C(Z,X) \to C(Z,Y)$ für jeden Raum Z stetig.

(3) Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist $\cdot \circ f\colon C(Y,Z) \to C(X,Z)$ für jeden Raum Z stetig.

(4) Die Abbildung $C(X \sqcup Y, Z) \to C(X,Z) \times C(Y,Z)$ mit $f \mapsto (f|_X, f|_Y)$ ist stetig.

(5) Die Abbildung aus (4) besitzt eine stetige Umkehrabbildung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es sei X ein Hausdorff-Raum und (Y,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C(X,Y)$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X,Y)$ konvergiert, wenn $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer und (Y,d_Y) ein metrischer Raum. Wir nehmen an, dass es Kompakta $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X gibt, so dass

$$K_i \subset \mathring{K}_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\ .$$

Zeigen Sie:

(1) Durch

$$d_i(f,g) = \sup_{x\in K_i} d_Y(f(x), g(x))$$

wird eine Folge von Halbmetriken auf $C(X,Y)$ definiert, so dass für alle $f \neq g\colon X \to Y$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(f,g) \neq 0$ existiert.

(2) Die Konstruktion aus Übung 3 von Blatt 4 liefert eine Metrik d auf $C(X,Y)$, die die kompakt-offene Topologie induziert.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ein (Schief-)Körper, und sei $k = 1$, 2 oder $4 = \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$, dann sei

$$\bigl(\Bbbk P^n, \mathcal{O}_{\Bbbk P^n}\bigr) = \bigl(\Bbbk^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\bigr) \,/\sim ,$$

wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ genau dann, wenn es ein $z \in \Bbbk^* = \Bbbk \setminus \{0\}$ gibt, so dass $y_i = zx_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$ wird auch als $[x_0 : \dots : x_n]$ geschrieben. Zeigen Sie, dass $\Bbbk P^n$, versehen mit der Quotiententopologie, eine kn-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass $\Bbbk P^n$ die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von $U_i = \{\, [x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0 \,\} \subset \Bbbk P^n$ nach $\Bbbk^n \cong \mathbb{R}^{nk}$.