8. Übungsblatt zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 29.6. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Die Klasse der Mengen zusammen mit konstanten Abbildungen als Morphismen bilden eine Kategorie.

(2) Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f\colon A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Wenn f invertierbar ist, dann ist das Inverse eindeutig.

(3) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $A \subset X$. Dann ist $f|_A\colon A \to f(A)$ auch eine Homotopieäquivalenz.

(4) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann gibt es genau eine Homotopie-inverse Abbildung $g\colon Y \to X$.

(5) Es sei $A \subset Y$ und $\phi\colon A \to X$ beliebig. Wenn $X \to X \cup_\phi Y$ eine Einbettung ist, dann ist ϕ stetig.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es sei $\mathbb{k}P^n$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 7. Die Abbildung

$$H^n_{\mathbb{k}}\colon S^{k(n+1)-1} \to \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{k}P^n$$

heißt *Hopffaserung*, wobei wir die zweite Abbildung mit q_n bezeichnen, also

$$q_n\colon \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\} \ni (z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{k}P^n.$$

Zeigen Sie:

(1) Für einen quasikompakten Raum X und einen Hausdorffraum Y ist jede stetige Bijektion $F\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus.

(2) Die Abbildungen

$$\mathbb{k}P^n \ni [z_0 : \dots : z_n] \mapsto [z_0 : \dots : z_n : 0] \in \mathbb{k}P^{n+1}$$

und

$$\mathbb{k}^{n+1} \supset D^{k(n+1)} \ni (z_0, \dots, z_n) \mapsto \left[z_0 : \dots : z_n : \sqrt{1 - |z_0|^2 - \dots - |z_n|^2}\right] \in \mathbb{k}P^{n+1},$$

wobei $D^{k(n+1)} = \left\{x \in \mathbb{k}^{n+1} \;\middle|\; |x| \le 1\right\}$, sind stetig.

(3) Der Raum

$$\mathbb{k}P^n \cup_{H^n_{\mathbb{k}}} D^{k(n+1)}$$

ist homöomorph zu $\mathbb{k}P^{n+1}$.

(4) $\mathbb{k}P^n$ lässt sich als CW-Komplex schreiben.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es seien X, Y topologische Räume. Zeigen Sie: Die Relation $\sim$ auf $C(X, Y)$ ist eine Äquivalenzrelation, wobei

$$f \sim g \iff f \text{ und } g \text{ sind homotop.}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Zeigen Sie: Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.