9. Übungsblatt zur Vorlesung Topologie
im Sommersemester 2022 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 6.7. (Briefkästen Ernst-Zermelo-Straße 1, Keller)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab.

(2) Der Funktor π_1 bildet injektive Abbildungen auf injektive Gruppenhomomorphismen ab.

(3) Es sei $\mathcal{C}_n$ die Kategorie mit einem Objekt $\{*_n\}$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_n}(*_n, *_n) = M_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Determinante ein Funktor $\det\colon \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_1$.

(4) Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{T}op$ der Funktor, der $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ auf $f\colon X \to Y$ abbildet. Es gibt $\mathcal{G}\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op_+$ so, dass $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$ die Identität auf Objekten und Morphismen liefert.

(5) Es sei X homotopieäquivalent zu Y. Wenn X wegzusammenhängend ist, dann auch Y.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Seien X, Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1\bigl(X \times Y, (x, y)\bigr) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \ .$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

(1) Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(2) Jede Abbildung $F\colon S^1 \to X$ lässt sich zu einer Abbildung $\overline{F}\colon D^2 \to X$ mit $\overline{F}|_{\partial D^2} = F$ ausdehnen.

(3) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ sind für alle $x \in X$ trivial.

(4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten x, $y \in X$ sind homotop.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Seien T (Toast), S (Schinken) und A (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, insbesondere messbar. Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die jede der drei Teilmengen T, S und A in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

Hinweis: Zu jedem $v \in S^2$ existiert (mindestens) ein $d = d_v$, so dass die Hyperebene

$$\{x \mid \langle x, v\rangle = d\}$$

das gesamte Sandwich $T \cup S \cup A$ in zwei gleichgrosse Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen t, s und $a\colon S^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$t(v) = \operatorname{vol}\bigl\{\, x \in T \bigm| \langle x, v\rangle \leq d_v \,\bigr\}$$

und s, a analog nicht von der Wahl von d_v wie oben, sondern nur von v abhängen, und in v stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.