Probelausur: "Toplogie" SS 2023

Bitte versuchen Sie die folgenden Aufgaben unter Klausurbedingungen zu bearbeiten.

Datum und Uhrzeit:	-
Prüfungsdauer:	2 Stunden
Prüfer:	Prof. Dr. Sebastian Goette

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Anmerkungen:

- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet und am Eingang abgegeben werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- Erlaubte Hilfsmittel: ein doppelseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten. Aussagen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Aufgabeteile dürfen Sie im Rest der Aufgabe verwenden.**

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	10		
Aufgabe 2	10		
Aufgabe 3	10		
Aufgabe 4	10		
Aufgabe 5	10		
Summe:	**50**		

Note: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1: (10 Punkte=2+2+2+2+2 Punkte)
Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein **<u>und</u>** geben Sie eine knappe Begründung oder ein ein Gegenbeispiel an. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung nutzen, geben Sie die entsprechende Aussage jedoch inklusive Annahmen und Behauptung komplett an.

(a) Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab.

(b) Quotienten kompakter Räume sind kompakt.

(c) Die Klumpentopologie erfüllt (T3).

(d) Es sei ein topologischer Raum X gegeben. Wenn für alle Y alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ stetig sind, dann ist X ein Hausdorffraum.

(e) Es sei ein metrischer Raum X gegeben und es sei $A \subset X$. Dann wird die Unterraumtopologie auf A durch eine Metrik induziert.

Aufgabe 2: (10 Punkte=5+5 Punkte)
Es seien X ein Hausdorffraum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir definieren

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn der Quotientenraum $X/\sim$ ein Hausdorffraum ist, dann ist $R \subseteq X \times X$ abgeschlossen.

(b) Wenn die Abbildung $p\colon X \to X/\sim$ offen ist, dann ist $R \subseteq X \times X$ abgeschlossen genau dann, wenn $X/\sim$ ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 3: (10 Punkte=5+5 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum, $f\colon X \to Y$ sei surjektiv und Y trage die Quotiententopologie. Es sei zusätzlich Z ein lokalkompakter topologischer Raum. Es bezeichne $\mathcal{O}_\sqcap$ die Produkttopologie und $\mathcal{O}_{\text{fin}}$ die Quotiententopologie auf $Y \times Z$ zur Abbildung $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$. Zeigen Sie die Stetigkeit der Abbildungen

(a) $\mathrm{id}\colon (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}}) \to (Y \times Z, \mathcal{O}_\sqcap)$ und

(b) $\mathrm{id}\colon (Y \times Z, \mathcal{O}_\sqcap) \to (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}})$.

Hinweis (zu (b)): Betrachten Sie das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{in} & C(Z, (X \times Z, \mathcal{O}_\sqcap)) \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow \\ Y & \longrightarrow & C(Z, (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}})) \end{array}$$

und benutzen Sie das Exponentialgesetz.

Aufgabe 4: (10 Punkte=2+2+2+2+2 Punkte)
Es sei

$$X = \bigcup_{n\geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos\phi + 1, \sin\phi) \;\middle|\; \phi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) Ist X kompakt?

(b) Ist X metrisierbar?

(c) Ist X lokal wegzusammenhängend?

(d) Ist X semilokal einfach zusammenhängend?

(e) Zeigen Sie, dass X keine universelle Überlagerung besitzt.

Aufgabe 5: (10 Punkte=2+3+2+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \in S^1 \times S^1$ eine universelle Überlagerung ist.

(b) Sei $F\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ gegeben durch $(z,w) \mapsto (-z, \overline{w})$. Zeigen Sie: die Untergruppe $\{\mathrm{id}, F\} \subset \mathrm{Aut}(S^1 \times S^1)$ wirkt frei und eigentlich diskontinuierlich auf $S^1 \times S^1$.

(c) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von $(S^1 \times S^1)/\{\mathrm{id}, F\}$.

(d) Geben Sie die gesamte Decktransformationsgruppe dieser universellen Überlagerung an.