Topologie & Algebraische Topologie — SS 23

Sebastian Goette

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. Beispiel. Sei

$$B^n = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| < 1 \,\right\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| \le 1 \,\right\}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. Satz (Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert $x_0 \in D^n$ mit

$$f(x_0) = x_0 \;.$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. Satz (Banach). *Sei X ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei $F\colon X \to X$ eine Abbildung zu der ein $\lambda < 1$ existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \le \lambda \, \|x - y\| \tag{*}$$

für alle x, $y \in X$. Dann hat F einen eindeutigen Fixpunkt.

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

(1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.

(2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ formulieren, so dass $F(D^n) \subset D^n$. Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. Beispiel. Unter der n-dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1 \,\right\} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der S^n ist eine stetige Abbildung $V\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x .$$

0.5. Satz (vom Igel). *Sei n gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf S^n.*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn n ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und setzen einfach $V(x) = ix$.

0.6. Beispiel. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei A eine Algebra über $\mathbb{R}$, d.h., A ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine $\mathbb{R}$-bilineare Multiplikationsabbildung $*\colon A \times A \to A$. Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen A eine *Divisionsalgebra,* wenn zu jedem $a \in A \setminus \{0\}$ ein $a' \in A$ existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle $b \in A$ gilt.

0.7. Satz (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (die Quaternionen) und $\mathbb{C}\mathrm{a}$ (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

1.a. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis" sprechen, meinen wir damit eine Beschreibung, die Worte wie „für alle $\varepsilon > 0$ existiert ... " enthält .

1.1. Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty]$, die

(1) *positiv* ist, das heißt, $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
(2) *symmetrisch* ist, das heißt, $d(x, y) = d(y, x)$, und
(3) die *Dreiecksungleichung* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ erfüllt,

jeweils für alle x, y, $z \in X$.

1.2. Beispiel. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

(1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, jeweils mit $d(x, y) = |y - x|$.
(2) Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist metrisch mit $d(x, y) = \|y - x\|$.
(3) Jede Menge M trägt eine Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \text{, und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik $d|_Y = d|_{Y \times Y}$.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.114 und 1.116.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε-Ball um x ist die Menge

$$B_\varepsilon(x) = \{\, x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon \,\} .$$

1.3. Definition. Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ heißt *stetig am Punkt* $x \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$F\bigl(B_\delta(x)\bigr) \subset B_\varepsilon\bigl(F(x)\bigr) .$$

F heißt *stetig,* wenn F an allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne $\mathcal{P}X$ die Potenzmenge von X. Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kalligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmengen zu unterscheiden.

1.4. Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen in* X, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Die Gesamtheit aller offenen Mengen $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$ heißt die *metrische Topologie* auf X zur Metrik d. Sei $x \in X$, dann heißt eine beliebige Teilmenge $V \subset X$ eine *Umgebung von* x, wenn es eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subset V$.

1.5. Bemerkung. Die Offenheit einer Menge U hängt ab vom umgebenden Raum X und der gewählten Metrik d. So ist etwa die Menge $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ offen in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{R}$. Aus der Analysis wiessen Sie aber auch, dass unterschiedliche Metriken den gleichen Konvergenzbegriff und somit die gleiche Topologie induzieren können.

1.6. Bemerkung. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(a_i)_i$ in A, die in (X, d) im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert $\lim_{i\to\infty} a_i$ in A liegt. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn $X \setminus U$ abgeschlossen ist.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen. Auch das sollte aus der Analysis bekannt sein.

1.7. Satz. *Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $F : (X, d) \to (Y, d')$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Teilmengen von Y in X wiederum offen sind.*

Beweis. Wir nehmen an, dass F stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei $V \subset Y$ offen, und sei $x \in F^{-1}(V) \subset X$ beliebig. Da V offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$. Aufgrund der Stetigkeit von F existiert ein $\delta > 0$, so dass $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ gilt, insbesondere folgt $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$. Da x beliebig war, ist also $F^{-1}(V)$ offen in X.

Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da der Ball $B_\varepsilon(F(x))$ in Y offen ist, ist auch $U = F^{-1}\big(B_\varepsilon(F(x))\big)$ offen in X, und natürlich liegt x in U. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ gilt. Es folgt $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$. Da x und ε beliebig waren, ist F also stetig im Sinne von Definition 1.3. □

1.b. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Definition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis. Zur Motivation betrachten wir die entsprechenden Definitionen für metrische Räume aus dem letzten Abschnitt.

1.8. Bemerkung. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\mathcal{O}_d$ die von d definierte Topologie auf X.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und X selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu $\mathcal{O}_d$.
(2) seien $U_1, \dots, U_k$ offen, und sei $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k$. Da die U_i offen sind, existieren $\varepsilon_i > 0$, so dass $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, dann ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$. Da x beliebig war, ist $U_1 \cap \dots \cap U_k$ also wieder offen.
(3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$ eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei
$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U ,$$
dann existiert also ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$. Da x beliebig war, ist $\bigcup \mathcal{U}$ also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über $\mathcal{O}_d$, um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.9. Definition. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{O}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und X selbst liegen in $\mathcal{O}$.
(2) Seien $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$, dann liegt auch $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$.
(3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, dann liegt auch $\bigcup \mathcal{U}$ in $\mathcal{O}$.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

1.10. Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann definiert $\mathcal{O}_d$ nach Bemerkung 1.8 eine Topologie auf X. Umgekehrt heißt eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X *metrisierbar,* wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$. Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.11. Beispiel. Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren zwei "triviale" Topologien auf X.

(1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$, dann ist jede Teilmenge von X offen bezüglich $\mathcal{O}_\delta$. Wir nennen $\mathcal{O}_\delta$ die *diskrete Topologie* auf X. Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
(2) Das andere Extrem ist $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$. Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn X höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

1.12. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen* bezüglich $\mathcal{O}$, falls $U \in \mathcal{O}$. Sei $x \in X$ und $V \subset X$ mit $x \in V$, dann heißt V eine *Umgebung* von x bezüglich $\mathcal{O}$, falls es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $x \in U \subset V$ gilt. Sei $A \subset X$, dann heißt A *abgeschlossen* bezüglich $\mathcal{O}$, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.13. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Das *Innere* $\mathring{Y}$ von Y in X ist die größte offene Teilmenge von X, die ganz in Y enthalten ist. Der *Abschluss* $\overline{Y}$ von Y in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält. Der *Rand* von Y in X ist die Menge $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$.

1.14. Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir wollen uns überlegen, dass es die oben definierten Teilmengen wirklich gibt. Es gilt

$$\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \qquad \text{und} \qquad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A\,.$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.9 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement offen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \mathring{Y}\,, \qquad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y}\,, \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y\,.$$

1.15. Beispiel. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\text{in } \mathbb{Q}: \qquad && \mathring{V} = V\,, \qquad && \overline{V} = V\,, \qquad && \partial V = \emptyset\,, \\ &\text{und in } \mathbb{R}: \qquad && \mathring{V} = \emptyset\,, \qquad && \overline{V} = [-\pi, \pi]\,, \qquad && \partial V = [-\pi, \pi]\,. \end{aligned}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie $\mathcal{O}$ auf welchem Raum X wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich $\mathcal{O}$" oder „in X" in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.7 ein „topologisches" Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.16. Definition. Es sei $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann heißt F

(1) *stetig am Punkt* $x \in X$ genau dann, wenn für alle Umgebungen $V \subset Y$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V)$ wieder eine Umgebung von x ist, und
(2) *stetig* genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$.

Es bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y.

Wenn eine stetige Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ bijektiv ist und $F^{-1}\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ebenfalls stetig ist, heißt F ein *Homöomorphismus.*

1.17. Beispiel. (1) Nach Satz 1.7 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.
(2) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und sei y_0 ein Punkt in Y. Die konstante Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $F(x) = y_0$ für alle $x \in X$ (kurz: $F \equiv y_0$) ist immer stetig, denn für jede offene Menge $U \subset Y$ gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U \text{, und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.18. Bemerkung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume.
(1) Die Identität $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ auf X mit $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für alle $U \in \mathcal{O}_X$ gilt

$$\mathrm{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X \ .$$

(2) Seien $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $G\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch $G \circ F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig. Sei nämlich $U \subset Z$ offen in Z, dann ist $G^{-1}(U)$ offen in Y, und somit ist $F^{-1}\big(G^{-1}(U)\big)$ offen in X. Da also $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}\big(G^{-1}(U)\big) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Z$, ist $G \circ F$ stetig.

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man *echte Klassen.* Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.19. Definition. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus
(1) einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
(2) zu je zwei Objekten X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen*,
(3) je einem ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für jedes Objekt $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, und
(4) zu je drei Objekten X, Y, $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einer *Verkettung*

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \qquad \text{mit} \qquad (f, g) \mapsto g \circ f \ ,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.
Identität. Seien X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, dann gilt

$$f = f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f \ .$$

Assoziativität. Für alle X, Y, Z, $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ .$$

In der Literatur werden gelegentlich auch Klassen von Morphismen zwischen zwei gegebenen Objekten zugelassen. Solche Kategorien werden wir in dieser Vorlesung voraussichtlich nicht brauchen.

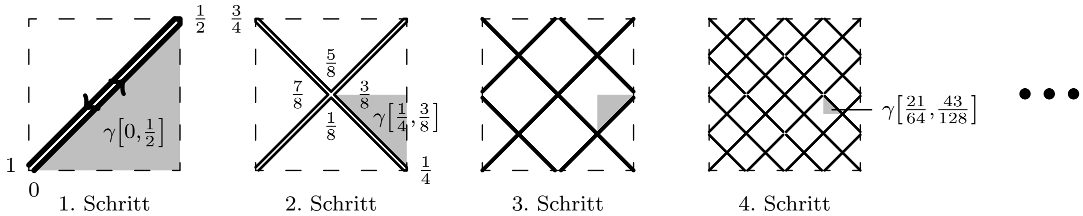


ABBILDUNG 1.1. Eine flächenfüllende Kurve

1.20. BEISPIEL. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

(1) Die Kategorie $\mathcal{S}et$ hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
(2) Die Kategorie $\mathcal{G}rp$ hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
(3) Sei $\Bbbk$ ein Körper, dann hat die Kategorie $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ als Objekte alle $\Bbbk$-Vektorräume, und als Morphismen alle $\Bbbk$-linearen Abbildungen.
(4) Die Kategorie $\mathcal{T}op$ hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.18.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.21. BEISPIEL. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall $I = [0,1]$ in die Menge $I \times I \subset \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve (mit dem richtigen Parameter) aneinandersetztzen, siehe Abbildung 1.1. Die entstehende Kurve γ ist stetig, sogar $\frac{1}{2}$-Höldersch. In jedem Schritt γ_{i+1} wird jede Strecke der Kurve γ_i durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge $(\gamma_i)_i$ gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt $\gamma(t)$ kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.22. DEFINITION. Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zwei Topologien auf einer Menge X. Dann ist $\mathcal{O}'$ *feiner* als $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ *gröber* als $\mathcal{O}'$, wenn $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

1.23. BEMERKUNG. Eine Topologie $\mathcal{O}'$ auf X ist nach Definition 1.16 genau dann feiner als $\mathcal{O}$, wenn die Identität $\mathrm{id}_X \colon (X,\mathcal{O}') \to (X,\mathcal{O})$ stetig ist. Mit Bemerkung 1.18 (2) folgt: Sei die Abbildung $F\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig, sei $\mathcal{O}'_X$ feiner als oder gleich $\mathcal{O}_X$, und sei $\mathcal{O}'_Y$ gröber als oder gleich $\mathcal{O}_Y$, dann ist auch $F\colon (X,\mathcal{O}'_X) \to (Y,\mathcal{O}'_Y)$ stetig.

Faustregel: je feiner eine Topologie auf X ist, desto weniger Folgen in X konvergieren, desto weniger Abbildung nach X sind stetig, und desto mehr Abbildungen von X in einen anderen Raum sind stetig.

1.24. BEISPIEL. Sei $X = \mathbb{R}^n$, sei $\mathcal{O}_d$ die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei $\mathcal{O}_f$ die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.114. Dann ist die diskrete Topologie $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aus Beispiel 1.11 (1) feiner als $\mathcal{O}_f$, die Topologie $\mathcal{O}_f$ ist feiner als $\mathcal{O}_d$, und $\mathcal{O}_d$ ist wiederum feiner als die Klumpentopologie $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ aus Beispiel 1.11 (2).

1.c. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann. Wenn das gut genug geht, kann man zeigen, dass es „viele“ reellwertige Funktionen auf dem Raum gibt.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu $I = ([0,1], \mathcal{O}_d)$ das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.25. Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich $\mathcal{O}_d$:*

(1) *einpunktige Teilmengen von X sind abgeschlossen;*
(2) *seien A_0, $A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen U_0, $U_1 \in \mathcal{O}$ mit $A_0 \subset U_0$ und $A_1 \subset U_1$;*
(3) *seien A_0, $A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $A_0 = f^{-1}\{0\}$ und $A_1 = f^{-1}\{1\}$.*

Beweis. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von $X \setminus \{x\}$ für ein beliebiges $x \in X$. Sei dazu $x \neq y \in X$, dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\} .$$

Also ist $X \setminus \{x\}$ offen nach 1.4.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Wähle f wie in (3). Da f stetig ist, sind die Mengen $U_0 = f^{-1}\big(\big[0, \frac{1}{2}\big)\big)$ und $U_1 = f^{-1}\big(\big(\frac{1}{2}, 1\big]\big)$ disjunkt und offen in X, da $\big[0, \frac{1}{2}\big)$ und $\big(\frac{1}{2}, 1\big]$ disjunkt und offen in I sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.122. □

1.26. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

(T0) wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in U$, $y \notin U$ oder $x \notin U$, $y \in U$,
(T1) wenn alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ für $x \in X$ abgeschlossen sind,
(T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X disjunkte offene Mengen U, $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und $y \in V$ gibt,
(T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Mengen U, $V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $x \in V$ gibt,
(T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f\colon (X, \mathcal{O}) \to I$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(x) = 1$ gibt,
(T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, $B \subset X$ disjunkte offene Mengen U, $V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$ gibt.

Ein topologischer Raum heißt *regulär,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär* oder *Tychonoff-Raum,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch“. Bemerkung 1.27 und Beispiel 1.28 sollen das verdeutlichen.

1.27. Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(1) Wenn $(X, \mathcal{O})$ hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge $(x_i)_i$ gibt es höchstens einen Punkt $x \in X$, so dass für jede Umgebung U von x fast alle Folgenglieder x_i in U liegen. Denn wäre $y \in X \setminus \{x\}$ ein weiterer Grenzwert, so könnte man x und y durch disjunkte offene Umgebungen U und V trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in $U \cap V = \emptyset$ liegen.

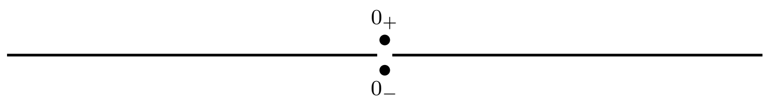


Abbildung 1.2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

(2) Wenn sich zwei Punkte x, $y \in X$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt $f(x) = f(y)$ für jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Denn wäre $f(x) \neq f(y)$, so könnte man $f(x)$ und $f(y)$ in $\mathbb{R}$ durch disjunkte offene Intervalle I, $J \subset \mathbb{R}$ trennen. Aber dann trennten $f^{-1}(I)$ und $f^{-1}(J)$ bereits x und y.

1.28. Beispiel. Betrachte den Raum $X = (-1,0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0,1)$ mit der folgenden Topologie $\mathcal{O}$. Eine Teilmenge $U \subset X$ sei offen, wenn zu jedem Punkt $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$ existiert, und falls $0_- \in U$ oder $0_+ \in U$, ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$ existiert, siehe Abbildung 1.2. Man überzeugt sich leicht, dass $(X, \mathcal{O})$ die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von 0_+ und 0_- eine kleine Menge der Form $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0_- \,.$$

Andererseits konvergiert die konstante Folge $(0_+)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0_-, und eine Folge, deren Glieder abwechselnd 0_+ und 0_- sind, divergiert.

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen" trägt.

1.29. Lemma (Urysohn). *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen A, $B \subset X$ eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*

Es gilt auch die Umkehrung: wenn zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen A, $B \subset X$ eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$ existiert, dann ist X ein (T4)-Raum. Dazu betrachten wir beispielsweise die offenen Mengen $f^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ und $f^{-1}\big((\frac{1}{2}, 1]\big)$.

1.30. Beispiel. Wir geben zwei einfache Beispiele.

(1) Die einpunktigen Mengen $\{0\}$, $\{1\} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen und disjunkt. Wir trennen sie mit Hilfe der stetigen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0,1]\,, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

(2) Die Teilmengen $[1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ und $[\sqrt{2}, 2] \cap \mathbb{Q}$ sind in $\mathbb{Q}$ abgeschlossen und disjunkt. Wir trennen sie mit der stetigen Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2}, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

All das geht nur, weil $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Siehe [**Que**, Abschnitt 7.A]. Sei

$$D = \left\{\, a\, 2^{-k} \;\middle|\; a,\, k \in \mathbb{N},\, 0 \leq a \leq 2^k \,\right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall I. Wir wollen induktiv zu allen $d \in D$ eine offene Menge U_d konstruieren, so dass $A \subset \overline{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$ für alle d, $d' \in D$ mit $d < d'$. Für $t \in I$ definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0,t]} U_d \;,$$

und wiederum gilt $\overline{U}_t \subset U_{t'}$ für alle t, $t' \in I$ mit $t < t'$, da zwischen t und t' noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit $U_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $U_t = X$ für $t > 1$ definieren wir

$$f(x) = \inf\{\, t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t \,\} \in [0,1] \;.$$

Aus $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$ folgt sofort $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für $t \in I$ und $x \in X$ mit $f(x) = t$ sowie $\varepsilon > 0$ das Intervall $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap I$. Sei $0 < \delta < \varepsilon$, dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \;,$$

also ist f stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie $(U_d)_{d \in D}$. Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei $A \subset Y \subset X$, A abgeschlossen und Y offen, dann existiert eine offene Menge U, so dass $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$.

Wir wählen also zunächst $U_0 \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$, und $U_1 = X \setminus B \in \mathcal{O}$. Seien jetzt alle U_d mit Nenner 2^k bestimmt, dann wählen wir $U_{(2a+1)\,2^{-k-1}}$ induktiv so, dass

$$\overline{U}_{a\,s^{-k}} \subset U_{(2a+1)\,2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)\,2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)\,2^{-k}} \;. \qquad \square$$

1.31. Bemerkung. Urysohn's Lemma 1.29 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.25 (3), denn dort galt sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$. Wenn nämlich $f^{-1}(0) = A$ gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge A als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right) \;.$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. Satz (Tietze). *Es sei X ein (T4)-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $g\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f|_A = g$.*

Der Beweis basiert auf dem Lemma 1.29 von Urysohn. Man erhält das Lemma von Urysohn zurück, indem man auf der abgeschlossenen Teilmenge $A \,\dot\cup\, B \subset X$ die Funktion g mit $g|_A \equiv 0$ und $g|_B \equiv 1$ betrachtet. Insbesondere gilt auch hier die Umkehrung: wenn man jede stetige Funktion auf einer abgschlossenen Teilmenge auf den ganzen Raum fortsetzen kann, dann erfüllt der Raum (T4). Wir greifen hier vor auf die Unterraumtopologie aus Abschnitt 1.f.

Beweis. Siehe [**Que**, Abschnitt 7.B]. Wir setzen zunächst Funktionen $g\colon A \to [-1,1]$ stetig auf X fort. Anschließend betrachten wir Funktionen $g\colon A \to \mathbb{R}$.

Sei also $g\colon A \to [-1,1]$ gegeben. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x)| \le 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle } x \in X, \tag{a}$$

$$|f_n(a) - g(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle } a \in A, \tag{b}$$

$$\text{und} \qquad |f_k(x) - f_\ell(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle } k,\, \ell \ge n \text{ und alle } x \in X. \tag{c}$$

Die Funktion $f_0 \equiv 0$ erfüllt bereits (a) und (b).

Gegeben f_n, betrachte die nach Definition 1.49 abgeschlossenen Teilmengen

$$B_n = \left\{ x \in A \;\middle|\; f_n(x) - g(x) \leq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$
$$\text{und} \qquad C_n = \left\{ x \in A \;\middle|\; f_n(x) - g(x) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

von X. Nach Urysohns Lemma 1.29 existiert eine stetige Funktion $h_n \colon X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ mit $h_n|_{B_n} \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ und $h_n|_{C_n} \equiv -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Dann hat die Funktion $f_{n+1} = f_n + h_n$ wieder die Eigenschaften (a) und (b).

Außerdem gilt (c), denn

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |h_{n+j}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^j < \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Im Grenzwert erhalten wir eine Funktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \colon X \to \mathbb{R} .$$

Wegen (c) ist die Konvergenz gleichmäßig, also ist die Grenzfunktion stetig nach Analysis I. Aus (b) folgt $f|_A = g$, und wegen (a) hat f Werte in $[-1,1]$.

Sei jetzt $g \colon A \to (-1,1)$ gegeben, dann liefert die obige Konstruktion zunächst eine stetige Fortsetzung $f \colon X \to [-1,1]$. Da aber $B = f^{-1}(\{-1,1\})$ abgeschlossen und zu A disjunkt ist, erhalten wir mit dem Lemma von Urysohn eine Funktion $u \colon X \to [0,1]$ mit $u|_A \equiv 1$ und $u|_B \equiv 0$, und die Funktion uf ist eine Fortsetzung von g mit Werten in $(-1,1)$. Da $(-1,1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, folgt der obige Satz. □

1.33. Bemerkung. Aus Satz 1.25 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \text{metrisierbar} & \Longrightarrow & \text{normal} & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{vollständig}\\ \text{regulär /}\\ \text{Tychonoff}\end{array} & \Longrightarrow & \text{regulär} & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{Hausdorff}\\ \text{(T2)}\end{array} & \Longrightarrow & \text{(T1)} & \Longrightarrow & \text{(T0)} \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & & \\ & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \Longrightarrow & \text{(T3)} & & & & & & \end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.25. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.25, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.29. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.25 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.123–1.125 wird deutlich, dass (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig aussagen.

1.34. Bemerkung. Wir haben gesehen, wie hilfreich Trennungsaxiome beispielsweise dann sind, wenn es darum geht, stetige Funktionen nach $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie zu konstruieren. Es gibt aber auch Bereiche der Mathematik, in denen das nicht im Vordergrund steht. Dann benötigt man auch keine Trennungsaxiome, beispielsweise sind algebraische Varietäten mit der Zariski-Topologie in den meisten Fällen nicht Hausdorffsch. Wir lernen später eine andere Charakterisierung der Hausdorff-Eigenschaft kennen, die sich leichter auf andere Kategorien von Räumen übertragen lässt.

1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie $\mathcal{O}$ zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen $\mathcal{U}$ von $\mathcal{O}$, so dass $\mathcal{O}$ selbst die gröbste Topologie ist, für die alle Mengen in $\mathcal{U}$ offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbassis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.35. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* von $\mathcal{O}$, wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \,\middle|\, \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \,\middle|\, I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\} .$$

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt *Subbasis* von $\mathcal{O}$, wenn die Menge

$$\left\{ U_1 \cap \dots \cap U_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ bildet.

Mit anderen Worten: $\mathcal{B}$ ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt. $\mathcal{S}$ ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus $\mathcal{S}$ schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.36. Beispiel. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

(1) Sei X eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von X bilden eine Basis der diskreten Topologie $\mathcal{O}_\delta$ auf X. Und da alle einpunktigen Mengen offen sind, muss jede Basis von $\mathcal{O}_\delta$ alle einpunktigen Mengen enthalten. Die Menge $\{X\}$ bildet eine Basis der Klumpentopologie $\mathcal{O}_K$, und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$ nach Konvention.

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge $\mathcal{B}$ aller metrischen Bälle mit Radius $1/k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Basis der metrischen Topologie $\mathcal{O}_d$. Sei nämlich $U \in \mathcal{O}_d$. Nach Definition 1.4 existiert zu jedem $x \in U$ ein Radius $0 < \varepsilon_x$ so dass $B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$, und zu ε_x existiert nach dem Axiom des Archimedes eine Zahl $k_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $0 < 1/k_x \leq \varepsilon_x$. Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{1/k_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{1/k_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B} .$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$, wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle $B_{1/k}(x)$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ enthält.

(3) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während $\mathcal{O}$ selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.37. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann hat $(X, \mathcal{O})$ die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

(A1) wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Menge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$ von Umgebungen besitzt, so dass $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von x ist, wenn es ein $U \in \mathcal{U}_x$ mit $U \subset V$ gibt, und

(A2) wenn $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$ wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis.* Aus (A2) folgt (A1), denn sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X und $x \in X$, dann ist

$$\mathcal{U}_x = \left\{ U \in \mathcal{B} \,\middle|\, x \in U \right\}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über „kleine" Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.38. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie* folgenabgeschlossen *ist, das heißt, wenn jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in A, die in X konvergiert, ihre Grenzwerte in A annimmt.*

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist. Wenn X das Axiom (A1) nicht erfüllt, ist der obige Satz falsch. Wir geben unten eine andere, ähnliche Charakterisierung abgeschlossener Mengen an.

Beweis. Sei A abgeschlossen, und sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle a_i in A liegen können. Da $X \setminus A$ eine offene Umgebung von a ist, existiert ein $i_0 > 0$, so dass $a_i \notin A$ für alle $i \geq i_0$.

Sei umgekehrt A nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt $x \notin A$, so dass jede Umgebung V von x die Menge A schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von x wiederum Umgebungen von x, und wir setzen $U_i = V_1 \cap \dots \cap V_i$. Dann ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass $U_j \subset U_i$ für alle $j \geq i$. Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_i \in A \cap U_i$. Eine Teilmenge $V \subset X$ ist Umgebung von x genau dann, wenn es ein i_0 gibt mit $U_i \subset V$ für alle $i \geq i_0$. Es folgt $a_i \in V$ für alle $i \geq i_0$. Daraus folgt, dass x ein Grenzwert unserer Folge a_i ist. □

1.39. Bemerkung. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.36 (2). Es gilt aber der *Metrisationssatz von Urysohn:* Wenn $(X, \mathcal{O})$ die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist $(X, \mathcal{O})$ genau dann metrisierbar, wenn $(X, \mathcal{O})$ regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass $(X, \mathcal{O})$ nach Satz 1.25 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing, Nagata und Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren, siehe [**Que**, Abschnitt 10.B].

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.40. Satz. *Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$ beliebig.*

(1) *Wenn für je endlich viele $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$ mit $k \geq 0$ eine Untermenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ existiert, so dass $B_1 \cap \dots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$, dann existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ auf X mit Basis $\mathcal{B}$. Wir nennen $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ die durch die Basis $\mathcal{B}$ definierte Topologie.*

(2) *Es existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ auf X mit Subbasis $\mathcal{S}$. Sei $\mathcal{O}_X$ eine beliebige Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$, dann gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{O}_X$. Wir nennen $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ die durch die Subbasis $\mathcal{S}$ definierte Topologie.*

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ die *kleinste* oder *gröbste* Topologie auf X, bezüglich der alle Mengen der Subbasis $\mathcal{S}$ offen sind. In Übung 1.128 sehen wir, dass man Konvergenz von Folgen in X und Stetigkeit von Abbildungen nach X allein anhand der Elemente einer Subbasis überprüfen kann.

Beweis. Zu (1). Die Menge $\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \,\middle|\, \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\}$ enthält $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.9. Nach Voraussetzung gilt $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$, somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um

Axiom (2) zu zeigen, seien $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$, dann folgt

$$\Bigl(\bigcup \mathcal{U}_1\Bigr) \cap \dots \cap \Bigl(\bigcup \mathcal{U}_k\Bigr) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \dots \cap U_k .$$

Nach Voraussetzung gilt $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$ für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist $\mathcal{O}$ eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie $\mathcal{O}'$, die $\mathcal{B}$ enthält, alle offenen Mengen aus $\mathcal{O}$ enthalten muss, also folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Wäre umgekehrt $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$, dann ließe U sich nicht als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{O}$ schreiben, $\mathcal{B}$ wäre dann also keine Basis von $\mathcal{O}'$. Also ist $\mathcal{O}_\mathcal{B} = \mathcal{O}$ die einzige Topologie mit Basis $\mathcal{B}$.

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \bigl\{\, U_1 \cap \dots \cap U_k \bigm| k \geq 0,\, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \,\bigr\} ,$$

dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie $\mathcal{O}_B$ mit Subbasis $\mathcal{S}$. Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf X mit Subbasis $\mathcal{S}$ ist; in der Tat enthält jede Topologie $\mathcal{O}_X$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ bereits $\mathcal{O}_\mathcal{S}$. □

1.e. Filter und Konvergenz

Wir kommen auf das Problem zurück, dass Satz 1.38 nur für Räume gilt, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Als Alternative zum Versuch, eine Topologie mittels konvergenter Folgen zu beschreiben, betrachten wir jetzt die Konvergenz von Filtern. Wir benutzen diesen Begriff später auch, um den Satz von Tychonoff zu beweisen.

Um zu verstehen, warum sich eine Topologie nicht immer nur mit Hilfe von Folgen beschreiben lässt, konstruieren wir zunächst einen Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt. Dazu betrachten wir die Ordnungstopologie auf einer wohlgeordneten Menge, die eine überabzählbare Ordinalzahl enthält.

1.41. Bemerkung. Es sei X eine Menge mit einer Ordnung $\prec$, das heißt, es gilt

(1) *Totalität* und *Antisymmetrie.* Für $x, y \in X$ gilt genau eine der drei Aussagen $x \prec y$, $y \prec x$ oder $x = y$.
(2) *Transitivität.* Für $x, y, z \in X$ implizieren $x \prec y$ und $y \prec z$, dass $x \prec z$.

Dann definieren wir die Ordnungstopologie „$\mathcal{O}_\prec$“ als die Topologie mit der Subbasis

$$\mathcal{S}_\prec = \bigl\{\, (-\infty, x) \bigm| x \in X \,\bigr\} \cup \bigl\{\, (x, \infty) \bigm| x \in X \,\bigr\} ,$$
$$\text{wobei} \qquad (-\infty, x) = \bigl\{\, y \in X \bigm| y \prec x \,\bigr\} \qquad \text{und} \qquad (x, \infty) = \bigl\{\, y \in X \bigm| x \prec y \,\bigr\} .$$

Dabei sind „$\pm\infty$“ hier zwei Symbole, keine Elemente von X. Endliche Durchschnitte solcher Mengen liegen entweder wieder in $\mathcal{S}$ oder sind von der Form

$$(x, y) = \bigl\{\, z \in X \bigm| x \prec z \text{ und } z \prec y \,\bigr\} .$$

Als Beispiel erhalten wir auf $\mathbb{R}$ mit der üblichen Anordnung „$<$“ genau die Standardtopologie. Trotz der ähnlichen Bezeichnung ist das hier jedoch nicht die Topologie aus Übung 1.124.

Wir machen jetzt noch folgende Zusatzannahmen.

(3) *Wohlordnung.* Jede nichtleere Teilmenge von X enthält ein kleinstes Element.
(4) *Kleinste überabzählbare Ordinalzahl.* Es gibt ein Element $\omega_1 \in X$, so dass $(-\infty, \omega_1)$ überabzählbar ist, aber für alle $x \prec \omega_1$ die Teilmenge $(-\infty, x)$ abzählbar ist.

In $(\mathbb{R}, <)$ sind diese beiden Annahmen offensichtlich nicht erfüllt. In $(\mathbb{N}, <)$ gilt immerhin (3). In einer Vorlesung über Mengenlehre lernt man mehr über wohlgeordnete Mengen und Ordinalzahlen.

Der Abschluss der Menge $U = (-\infty, \omega_1)$ enthält das Element ω_1. Denn sei ω_1 Element einer Basismenge B der Form (x, y) mit $x \in X \cup \{-\infty\}$ und $y \in X \cup \{\infty\}$, dann ist wegen (4) die Teilmenge $(x, \omega_1) = B \cap U$ überabzählbar, also insbesondere nicht leer.

Sei andererseits $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U, die gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert. Wegen (3) gib es ein kleinstes Element $x' \in X \setminus \big((-\infty, x) \cup \{x\}\big)$, somit liegen fast alle Glieder der Folge in der Umgebung $(-\infty, x')$ von x, ohne Einschränkung gelte also $x_n \prec x'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $x_n \prec x$ oder $x_n = x$. Sei andererseits $y \prec x$, dann folgt $y \prec x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt somit

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (-\infty, x_n) = (-\infty, x) \ .$$

Als Vereinigung einer abzählbaren Familie abzählbarer Mengen ist $(-\infty, x)$ selbst abzählbar, also $x \prec \omega_1$ wegen (4). Die Menge $U \subset X$ ist somit folgenabgeschlossen, aber nicht abgeschlossen.

Um im obigen Beispiel mit so etwas wie Folgen argumentieren zu können, könnten wir anstelle von Folgen also Familien mit beliebige großen „gerichteten“ Indexmengen betrachten. Das führt auf den Begriff eines „Netzes“, den wir hier aber nicht einführen wollen. Alternativ kann man auch Systeme aus immer kleineren Teilmengen eines Raumes X betrachten. Dahinter steht eine ähnliche Idee wie bei der Intervallschachtelung in der Analysis. Anschaulich wäre hierfür wohl der Begriff „Trichter“, es hat sich aber ein anderer Name durchgesetzt.

1.42. Definition. Es sei X eine Menge. Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \text{ und } X \in \mathcal{F} \ , \tag{1}$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } B \in \mathcal{F} \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B \in \mathcal{F} \ , \tag{2}$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } A \subset B \subset X \qquad \Longrightarrow \qquad B \in \mathcal{F} \ . \tag{3}$$

Ein Filter heißt *frei,* wenn $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$. Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Filter auf X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, dann heißt $\mathcal{G}$ *feiner* als $\mathcal{F}$.

1.43. Beispiel. Es folgen einige nicht ganz unwichtige Beispiele.

(1) Sei $A \subset X$ nicht leer, dann ist
$$\mathcal{F}_A = \big\{\, B \subset X \;\big|\; A \subset B \,\big\}$$
ein Filter auf X. Er ist nie frei.

(2) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann bilden die Umgebungen von x einen Filter $\mathcal{U}_x$, den *Umgebungsfilter* von x. Er ist ebenfalls nie frei.

(3) Es sei X eine unendliche Menge. Betrachte
$$\mathcal{F} = \big\{\, A \subset X \;\big|\; X \setminus A \text{ ist endlich} \,\big\} \ .$$
Dann ist $\mathcal{F}$ der sogenannte *koendliche* Filter auf X. Er ist immer frei, und möglicherweise das einfachste Beispiel eines freien Filters.

(4) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X induziert einen Filter
$$\mathcal{F}_{(x_n)_n} = \big\{\, A \subset X \;\big|\; \text{es gibt } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } x_n \in A \text{ für alle } n \geq n_0 \,\big\} \ .$$
Teilfolgen induzieren feinere Filter.

Wir wollen Grenz- und Häufungspunkte von Filtern so definieren, dass der Filter $\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ aus Beispiel 1.43 (4) genau dann einen Grenz- oder Häufungspunkt hat, wenn das entsprechende für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt. Dabei heißt ein Punkt $x \in X$ *Häufungspunkt* einer Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von x ein x_i liegt mit $i \geq n$. Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.44. Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.

(1) Dann heißt $x \in X$ ein *Grenzwert* von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F}$ den Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$ von x enthält. Man sagt auch, dass $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert, kurz $\mathcal{F} \to x$.
(2) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $\mathcal{F}$, wenn $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}_x$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt.

In Übung 1.130 sehen wir, dass sich diese Definition für Filter, die von Folgen wie in Beispiel 1.43 (4) induziert werden, genau wie erwartet verhält. Wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist ein Punkt $x \in X$ genau dann Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge gegen x konvergiert. Bei Filtern gilt das analoge Resultat immer.

1.45. Satz. *Ein Punkt x in einem topologischen Raum X ist genau dann Häufungspunkt eines Filters $\mathcal{F}$ auf X, wenn es einen feineren Filter $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ gibt, der gegen x konvergiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Es sei $x \in X$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Dann enthält der feinere Filter

$$\mathcal{G} = \left\{ G \subset X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{U}_x \text{ und } F \in \mathcal{F} \text{ mit } U \cap F \subset G \right\}$$

den gesamten Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$, konvergiert also gegen x.

„$\Longleftarrow$“: Es sei $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ ein feinerer Filter, der gegen x konvergiert. Für $U \in \mathcal{U}_x$ und $F \in \mathcal{F}$ folgt U, $F \in \mathcal{G}$, also auch $U \cap F \in \mathcal{G}$, und somit $U \cap F \neq \emptyset$. □

Als nächstes wollen wir Abbildungen $F\colon X \to Y$ auf Filter anwenden. Im Falle einer Folge in X reicht es, F auf jedes Folgenglied einzeln anzuwenden, um eine Folge in Y zu erhalten. Im Falle von Filtern überlegen wir uns, dass F durch das zweifache Bilden von Urbildern die folgenden Abbildungen induziert:

$$F^{-1}\colon \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X \qquad \text{und} \qquad (F^{-1})^{-1}\colon \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}\mathcal{P}Y \;.$$

Das führt auf die folgende Definition.

1.46. Definition. Es sei $F\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann definieren wir den *Bildfilter* $F\mathcal{F}$ auf Y durch

$$F\mathcal{F} = \left\{ V \subset Y \mid F^{-1}(V) \in \mathcal{F} \right\} .$$

1.47. Bemerkung. In den Übungen überprüfen wir die folgenden Aussagen.

(1) Es sei $F\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen und $\mathcal{F}$ ein Filter auf F. Dann gilt

$$F\mathcal{F} = \left\{ V \subset Y \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{F} \text{ mit } F(U) \subset V \right\} \subset \mathcal{P}Y \;.$$

(2) Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Abbildung $x_\bullet\colon \mathbb{N} \to X$. Dann ist der von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induzierte Filter $\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ aus Beispiel 1.43 (4) gerade das Bild des koendlichen Filters auf $\mathbb{N}$ aus Beispiel 1.43 (3) unter der Abbildung $x_\bullet$.
(3) Die Bildfolge $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y induziert genau den Bildfilter $F\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ auf Y.

Die letzte Bemerkung könnte uns verleiten, anstelle von „Folgenstetigkeit“ den Begriff „Filterstetigkeit“ einzuführen. Der folgende Satz zeigt, dass wir diesen Begriff bereits kennen.

1.48. Satz. *Es sei $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Abbildung F ist am Punkt x stetig.*
(2) *Für jeden $\mathcal{F}$ Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $F\mathcal{F} \to F(x)$.*
(3) *Das Bild des Umgebungsfilters $\mathcal{U}_x$ konvergiert gegen $F(x)$.*

Selbstverständlich bleiben die Aussagen äquivalent, wenn wir vor jede noch „Für alle $x \in X$“ dazuschreiben. Wir sehen also, dass Filterstetigkeit (im Gegensatz zur Folgenstetigkeit) äquivalent zu Stetigkeit ist. Außerdem sehen wir, dass der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$ ausreicht, um Stetigkeit bei x zu testen. Wenn wir Folgenstetigkeit bei x prüfen wollen, reicht eine einzelne Folge dazu in der Regel nicht aus.

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Es sei F stetig bei x und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der gegen x konvergiert. Nach Definition 1.44 (1) ist $\mathcal{U}_{F(x)} \subset F\mathcal{F}$ zu zeigen. Sei also $V \in \mathcal{U}_{F(x)}$, das heißt, $V \in Y$ ist eine Umgebung von $F(x)$. Da F stetig bei x ist, ist $F^{-1}(V)$ Umgebung von x, also $F^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert. Nach Definition 1.46 folgt $V \in F\mathcal{F}$, was zu zeigen war.

Die Richtung „(2) $\Rightarrow$ (3)“ gilt, da $\mathcal{U}_x$ nach Definition 1.44 (1) gegen x konvergiert.

Zu „(3) $\Rightarrow$ (1)“ sei $V \subset Y$ eine Umgebung von $F(x)$. Zu zeigen ist, dass $F^{-1}(V)$ Umgebung von x ist. Nach Annahme gilt $V \in F\mathcal{U}_x$, also $F^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$ nach Definition 1.46. Aber dann ist $F^{-1}(V)$ eine Umgebung von x, was zu zeigen war. □

Tatsächlich bestanden alle Beweise in diesem Abschnitt allein daraus, Definitionen korrekt aufzuschlüsseln. So gesehen sind Filter zunächst einmal nur eine (zugegeben nicht offensichtliche) Verallgemeinerung von Folgen, mit denen sich viele grundlegende Konzepte der Topologie äquivalent umformulieren lassen. Die wirkliche Stärke dieses Kozeptes lernen wir erst in Abschnitt 1.h kennen, wenn wir den Satz von Tychonoff beweisen.

1.f. Unterräume und Produkte

In diesem Abschnitt betrachten wir zum einen die Unterraum- oder Relativtopologie, die aus Analysis II möglicherweise schon bekannt ist. Zum anderen betrachten wir beliebige (also auch unendliche) Produkte topologischer Räume. Die Definition der Topologie auf dem Produktraum ist dabei vielleicht etwas unerwartet — es gibt andere Definitionen, die auf den ersten Blick genauso gut aussehen. Wir begründen die Definition unten zum einen damit, dass die Produkttopologie einige sehr schöne Eigenschaften hat. Zum anderen ist sie eine Verallgemeinerung der „Topologie der punktweisen Konvergenz“. Und schließlich ist es genau diese Topologie, mit der wir später den Satz von Tychonoff formulieren und beweisen können.

Außerdem lernen wir in diesem Abschnitt „universelle“ und „charakteristische“ Eigenschaften kennen. Eine charakteristische Eigenschaft beschreibt eine bestimmte Topologie auf einer gegebenen Menge eindeutig, und zwar nur dadurch, dass wir angeben, welche Abbildungen von Mengen stetig sein sollen. Eine universelle Eigenschaft beschreibt völlig analog ein Objekt in einer beliebigen Kategorie (hier $\mathcal{T}op$, siehe Beispiel 1.20 (4)), und zwar bis auf eindeutige Isomorphismen.

1.49. Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$. Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-* oder *Spurtopologie*) $\mathcal{O}_Y$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \left\{ Y \cap U \;\middle|\; U \in \mathcal{O}_X \right\} .$$

Man überlegt sich, dass $\mathcal{O}_Y$ eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y , \qquad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y ,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \dots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \dots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup \mathcal{U}$$

für alle $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$.

1.50. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ versehen mit der Unterraumtopologie $\mathcal{O}_Y$. Dann gilt:*

(1) *$\mathcal{O}_Y$ ist die gröbste Topologie auf Y, für die die Inklusion $\iota \colon Y \hookrightarrow X$ stetig ist.*

(2) *$\mathcal{O}_Y$ ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung F von einem beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ nach Y genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $\iota \circ F \colon Z \to X$ stetig ist.*

Beweis. Da $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von $\mathcal{O}_Y$.

Zu (2) sei zunächst $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein beliebiger topologischer Raum, und sei $F \colon Z \to Y$ eine Abbildung. Für eine offene Menge $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$ gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}\big(\iota^{-1}(U)\big) = (\iota \circ F)^{-1}(U) \;,$$

also ist F genau dann stetig bezüglich $\mathcal{O}_Y$, wenn $\iota \circ F$ stetig ist bezüglich $\mathcal{O}_X$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}_Y$ die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie $\mathcal{O}$ auf Y, die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Da $\mathrm{id} \colon (Y, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig ist, ist dann auch $\iota = \iota \circ \mathrm{id} \colon (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ stetig. Aber da $\mathcal{O}_Y$ diese Eigenschaft auch hat, ist somit auch $\mathrm{id}_Y \colon (Y, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig. Die folgenden Diagramme erklären die beiden Beweisschritte.

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{O}) \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[dr, dashed, "\iota"] & \\
(Y,\mathcal{O}) \arrow[r, "\iota"] & (X,\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{O}) \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "\iota"] & (Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\iota"] \\
& (X,\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Mit vertauschten Rollen folgt analog die Stetigkeit von $\mathrm{id}_Y \colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O})$, und $\mathcal{O}$ ist sowohl gröber als auch feiner als $\mathcal{O}_Y$ nach Bemerkung 1.23. Also stimmen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_Y$ überein. ☐

Aus dem Beweis ergibt sich, dass die charakteristische Eigenschaft (2) ausreicht, um die Unterraumtopologie eindeutig festzulegen. Ihre Existenz mussten wir aber „von Hand“ zeigen.

Wir können jetzt die fehlenden Details im Satz 1.32 von Tietze nachtragen. Die Aussage „$g \colon A \to \mathbb{R}$ ist stetig“ bezieht sich auf die Unterraumtopologie auf $A \subset X$. Und im Beweis betrachten wir abgeschlossene Teilmengen B_n, $C_n \subset A$ von A. Das heißt, es gibt eine abgeschlossene Teilmengen E_n, $F_n \subset X$ mit $B_n = A \cap E_n$ und $C_n = A \cap F_n$. Da A in X abgeschlossen ist, sind folglich B_n und C_n auch in X abgeschlossen, und wir dürfen das Lemma von Urysohn auf X anwenden.

1.51. Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine *Einbettung* von X nach Y ist eine injektive Abbildung $F \colon X \hookrightarrow Y$, so dass die induzierte Abbildung von $(X, \mathcal{O}_X)$ nach $F(X) \subset Y$ mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \big\{\, (x_i)_{i \in I} \;\big|\; x_i \in X_i \,\big\}$$

das kartesische Produkt einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Mengen über einer beliebigen Indexmenge I, und mit $\pi_j \colon X \to X_j$ die Projektion auf die j-te Komponente, so dass $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$.

1.52. Definition. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der X_i ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \Big(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcap\Big) \;,$$

wobei $\mathcal{O}_\sqcap$ erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\sqcap = \big\{\, \pi_i^{-1}(U_i) \;\big|\; i \in I \text{ und } U_i \in \mathcal{O}_i \,\big\} \;.$$

Da wir $\mathcal{O}_\sqcap$ mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.40, dass $\mathcal{O}_\sqcap$ eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{S}_\sqcap$ hat die Gestalt

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i) \qquad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \;.$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge $U \subset \prod_i X_i$ ist genau dann offen, wenn jeder Punkt x eine Umgebung der obigen Form hat.

1.53. Satz. *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.*

(1) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcap$ ist die gröbste Topologie auf $\prod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\pi_i \colon \prod_i X_i \twoheadrightarrow X_i$ stetig sind.*

(2) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcap$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf dem kartesischen Produkt $\prod_i X_i$, so dass eine Abbildung G von einem beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ in das Produkt $\prod_i X_i$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $\pi_i \circ G$ für alle $i \in I$ stetig sind.*

(3) *Der Raum $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcap)$ zusammen mit den Abbildungen $(\pi_i \colon \prod_i X_i \twoheadrightarrow X_i)_{i \in I}$ ist ein* Produkt *in der Kategorie $\mathcal{T}op$, das heißt, zu jedem topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und jeder Familie stetiger Abbildungen $(G_i \colon Z \to X_i)_{i \in I}$ existiert genau eine stetige Abbildung $G \colon Z \to Y$, so dass $G_i = \pi_i \circ G$ für alle $i \in I$.*

1.54. Bemerkung. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht. In der rechten unteren Ecke steht eigenlich für jedes $i \in I$ ein separater Eintrag, mit separaten Abbildungen von den beiden anderen Objekten im Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) \arrow[d, two heads, "\pi_i"] \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[ur, "G"] \arrow[r, "\pi_i \circ G"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\eta_i"] \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[r, "G_i"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Im Gegensatz dazu zeigt das rechte Diagramm die universelle Eigenschaft (3). Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit stetigen Abbildungen $\eta_i \colon Y \to X_i$ ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.53 (3), wenn für alle $(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit stetigen Abbildungen $G_i \colon Z \to X_i$ genau eine stetige Abbildung G wie im rechten Diagramm existiert.

Ein typisches Beispiel dafür ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Aus Analysis II wissen Sie, dass eine Abbildung f in den $\mathbb{R}^n$ genau dann stetig (oder beispielsweise auch differenzierbar) ist, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ alle stetig (beziehungsweise differenzierbar) sind.

Das Produkt ist durch (3) bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt. Wenn also ein anderer Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit Abbildungen $(\eta_i \colon Y \to X_i)_i$ die Produkteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus $G \colon Y \to \prod_i X_i$ mit $\eta_i = \iota_i \circ G$ für alle i. Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{tikzcd} & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) \arrow[d, two heads, "\pi_i"] \\ (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[r, "\eta_i"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\eta_i"] \\ (\prod_i X_i, \mathcal{O}) \arrow[ur, dashed, "H"] \arrow[r, two heads, "\pi_i"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) \arrow[d, two heads, "\pi_i"] \\ (\prod_i X_i, \mathcal{O}) \arrow[ur, dashed, "H \circ G", "\mathrm{id}"'] \arrow[r, two heads, "\pi_i"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\eta_i"] \\ (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[ur, dashed, "G \circ H", "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\eta_i"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen G und H, die letzten zwei Diagramme zeigen, dass H zu G invers ist, so dass G in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Produkt miteinander identifizieren.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.53 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Analog kann man in vielen Kategorien (wie $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$ oder $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$) Produkte definieren, muss deren Existenz aber jedesmal beweisen.

Beweis von Satz 1.53. Die Subbasis $\mathcal{S}_\sqcap$ enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von X_i unter den Abbildungen π_i. Also sind alle π_i bezüglich einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_\sqcap \subset \mathcal{O}$, und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei G stetig. Dann sind auch die Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig. Nach Übung 1.128 folgt Stetigkeit von G bereits, wenn $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ nur für alle $U \in \mathcal{S}_\sqcap$ gilt. Aber

$$G^{-1}\bigl(\pi_i^{-1}(U_i)\bigr) = (\pi_i \circ G)^{-1} U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen $\pi_i \circ G$. Der Beweis der Eindeutigkeit ist analog zum Beweis des Satzes 1.50 (2).

Behauptung (3) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts von Mengen und Behauptung (2). □

1.55. Bemerkung. Die universelle Eigenschaft sagt, wann eine Abbildung in ein Produkt stetig ist. Sie sagt nichts über Abbildungen von einem Produkt in einen anderen Raum. Dazu erinnern wir uns an ein Beispiel aus der Analysis II. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Dann sind zwar $f(\,\cdot\,, y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x, \,\cdot\,)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle y beziehungsweise $x \in \mathbb{R}$ stetig, aber f nimmt in jeder Umgebung von 0 alle Werte zwischen -1 und 1 an, kann also bei 0 nicht stetig sein.

1.56. Bemerkung. Eine andere natürliche Topologie auf $\prod_i X_i$ ist die *Box-Topologie* $\mathcal{O}_\square$ mit Basis

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge I unendlich ist und unendlich viele X_i nicht die Klumpentopologie tragen, ist $\mathcal{O}_\square$ echt feiner als $\mathcal{O}_\sqcap$. Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie $\mathcal{O}_\sqcap$, obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht. In Übung 1.140 fassen wir die Produkttopologie in dem Spezialfall, dass $X_i = X$ für alle $i \in I$, als *Topologie der punktweisen Konvergenz* von Folgen in $\mathrm{Abb}(I, X)$ auf. Wenn die Menge I unendlich ist, erhalten wir für die Boxtopologie einen sehr viel restriktiveren Konvergenzbegriff.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft E (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeitseigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft E haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

1.57. Satz. (1) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) auf Unterräume vererbt.*
(2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

Beweis. Zu (1) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also $A \subset Y$ abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf $Y \subset X$. Dann lässt sich $Y \setminus A$ zu einer offenen Teilmenge von X fortsetzen, deren Komplement B in X abgeschlossen ist mit $A = Y \cap B$. Sei $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$. Wir nehmen an, dass (T3) in X gilt und finden disjunkte offene Mengen $U, V \subset X$ mit $y \in U$, $B \subset V$. Dann sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ in Y offen und disjunkt und trennen y und A. Zu (T3a) betrachte A, B und y wie oben. Wenn es eine Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $B \subset f^{-1}(0)$ und $f(y) = 1$ gibt, dann ist $f|_y$ stetig nach Satz 1.50 (2) und trennt y und A in Y.

Sei $\mathcal{U}_x$ abzählbare Umgebungsbasis von $x \in Y \subset X$ in X, dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x in Y. Genauso überträgt sich (A2) von X auf den Unterraum Y.

Zu (2) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_y)$ erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U von $y \in Y$ eine abgeschlossene Umgebung A mit $y \in A \subset U$ gibt. Denn wenn (T3) gilt und U Umgebung von y ist, dann ist auch das Innere $\mathring{U}$ Umgebung von y. Wir trennen $B = Y \setminus \mathring{U}$ von y durch disjunkte offene Mengen V, $W \subset X$. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossene Umgebung, da $y \in W \subset Y \setminus V$, und es gilt $Y \setminus V \subset \mathring{U} = Y \setminus B \subset U$. Die Umkehrung gilt analog.

Sei also $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ und sei U Umgebung von x. Nach Definition 1.52 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.40 (2) existieren $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \tag{*}$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen $A_{ij} \subset U_{ij}$ von x_{ij}, und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{ij}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von x in $\prod_{i \in I} X_i$. Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei $x \in \prod_{i \in I} X_i$ wie oben und $B \subset \prod_{i \in I} X_i$ abgeschlossen. Setze $U = \prod_{i \in I} X_i \setminus B$. Dann existieren $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ wie in (*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j} \colon X_{i_j} \to [0,1] \qquad \text{mit} \qquad f_{i_j}|_{X_{i_j} \setminus U_{i_j}} = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1 \;.$$

Dann sind die $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ nach Satz 1.53 (2) stetig, und

$$f = \min\bigl(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}\bigr) \colon \prod_{i \in I} X_i \to [0,1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit $f(x) = 1$ und

$$B \subset X \setminus \bigl(\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\bigr) \subset f^{-1}(0) \;.$$

Sei schließlich I höchstens abzählbar und $\mathcal{B}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}_i$. Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \mathcal{B}_i$$

von $\mathcal{O}_\sqcap$, denn jedes Element $\pi_i^{-1}(U)$ von $\mathcal{S}_\sqcap$ lässt sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \bigl\{U_1 \cap \dots \cap U_k \bigm| k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\bigr\}$$

von $\mathcal{O}_\sqcap$ abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt. □

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche, ja sogar abzählbare Produkte übertragen lassen (Übungen 1.133, 1.135, 1.139), womit diese nach Satz 1.25 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.39 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [**Que**], [**SS**] und Übung 1.148 (5).

1.g. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ besitzen auf I ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge $(x_i)_i$ in I hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheitheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{U} = X$.

1.58. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X

(1) *quasikompakt,* wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ mit $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$,
(2) *kompakt,* wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
(3) *abzählbar kompakt,* wenn X Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, $X = \bigcup_{i=0}^{N} U_i$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und
(4) *folgenkompakt,* wenn X Hausdorffsch ist und jede Folge $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt.

1.59. Bemerkung. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

(1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen und $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von A, dann existiert $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ mit
$$\mathcal{V} = \{\, U \cap A \mid U \in \mathcal{U} \,\} .$$
Dann ist aber $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ offene Überdeckung von X, und eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von A, nämlich
$$\{\, U \cap A \mid U \in \mathcal{U}' \,\} .$$
(2) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ (abzählbar / folgen-) kompakt, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Hausdorff-Raum und $F\colon X \to Y$ stetig, dann ist das Bild $\operatorname{im} F \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.141).
(3) Sei $(X, \mathcal{O})$ (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.61 und 1.62 unten.
(4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.142).
(5) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, und sei $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$ kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

1.60. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum.*

(1) *Wenn X kompakt oder folgenkompakt ist, ist X auch abzählbar kompakt.*
(2) *Es ist X genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.*
(3) *Wenn X abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist X folgenkompakt.*
(4) *Wenn X abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist X kompakt.*

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.

$$\text{kompakt} \quad \underset{\Longrightarrow}{\overset{(A2)}{\Longleftarrow}} \quad \text{abzählbar kompakt} \quad \underset{\Longleftarrow}{\overset{(A1)}{\Longrightarrow}} \quad \text{folgenkompakt}$$

Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

Beweis von Satz 1.60. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass

$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, andernfalls lassen wir U_i weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j \;.$$

Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, also liegen unendlich viele Folgenglieder in U_{i_0}, im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem abzählbar kompakten Raum X einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei $A_n = \overline{\{\, x_i \mid i \geq n \,\}} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, sei $U_n = X \setminus A_n$, dann ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X mit $U_m \subset U_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Es folgt, dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A_n \neq \emptyset$.

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt x der Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von x, und wie im Beweis von Satz 1.38 dürfen wir annehmen, dass $V_j \subset V_i$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$. Um eine Teilfolge mit Grenzwert x zu konstruieren, setzen wir $i_0 = 1$ und wählen induktiv $i_j > i_{j-1}$ für $j \geq 1$ so, dass $x_{i_j} \in V_j$. Aus $V_j \subset V_i$ für alle $i < j$ folgt $x_{i_k} \in V_j$ für alle $k \geq j$, also konvergiert $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Für (4) nehmen wir an, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}$ ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass X abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Menge $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$, so dass $V_i \subset U_i$, falls eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $V_i \subset U$ existiert, und $U_i = \emptyset$ sonst. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X war, muss dann auch $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt $x \in X$ ist in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten, und es existiert also ein i mit $x \subset V_i \subset U$. Elimination aller Indizes i mit $U_i = \emptyset$ liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von X, nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung. □

Es folgen einige weitere Sätze aus der Analysis, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.61. Satz. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.62. Satz (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.63. Satz (Lebesgue-Zahl). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in K$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$ existiert.*

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.64. Definition. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt,* wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

1.65. Beispiel. (1) Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind lokalkompakt, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ jedoch nicht.
(2) Es sei K kompakt und $U \subset K$ offen, dann ist U lokalkompakt nach Übung 1.143.

Wir können in Beispiel 1.65 (2) den Spieß umdrehen und fragen, ob jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum Unterraum eines kompakten Raumes ist.

1.66. Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Unter einer *Kompaktifizierung* von X versteht man eine Einbettung von X in einen kompakten Raum K, so dass das Bild von X dicht liegt.

Die Dichtheit ist dabei keine wirkliche Einschränkung. Sei etwa $\iota\colon X \to K$ eine Einbettung von X in ein Kompaktum X. Dann ist der Abschluss $\overline{\operatorname{im}\iota}$ des Bildes wieder kompakt, und $X \subset \overline{\operatorname{im}\iota}$ ist dicht.

In vielen Bereichen der Analysis und Geometrie interessiert man sich für Kompaktifizierungen. Oftmals stellt man dabei bestimmte Anforderungen an den Raum K, die sich aus dem jeweiligen Problem ergeben. Wir geben hier nur eine sehr einfache Kompaktifizierung an, in gewissem Sinne die einfachst mögliche. Den Gegenpol bildet die Stone-Čech-Kompaktifizierung, die wir in Abschnitt 1.h kennenlernen, mehr dazu in Bemerkung 1.74.

1.67. Satz (Alexandroff- oder Ein-Punkt-Kompaktifizierung). *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\infty \notin X$ ein zusätzlicher Punkt. Dann definiert*

$$\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O} \cup \big\{ \{\infty\} \cup X \setminus K \bigm| K \subset X \text{ kompakt} \big\}$$

eine kompakte Topologie auf $X' = X \cup \{\infty\}$. Wenn X selbst nicht kompakt war, liegt X dicht in X'.

Die stereographische Projektion zeigt, dass S^n homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist, siehe Übung 1.144.

Beweis. Die Axiome einer Topologie lassen sich leicht überprüfen. Sei jetzt $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X', dann gibt es mindestens ein $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U$. Dann ist $K = X' \setminus U_0 \subset X$ nach Konstruktion kompakt, und wir erhalten eine offene Überdeckung

$$\mathcal{U}' = \big\{ K \cap U \bigm| U \in \mathcal{U} \big\}$$

von K. Sei $K = (K \cap U_1) \cup \dots \cup (K \cap U_n)$ eine endliche Teilüberdeckung, dann folgt $X' = U_0 \cup \dots \cup U_n$. Also ist X' quasikompakt. Die Hausdorff-Eigenschaft ist ebenfalls leicht zu überprüfen.

Da X' nur einen Punkt mehr als X enthält, liegt X genau dann dicht in X', wenn $X \subset X'$ nicht abgeschlossen ist. Da abgeschlossene Unterräume kompakter Räume wieder kompakt sind, trifft das genau dann zu, wenn X selbst nicht kompakt ist. □

Man kann fragen, ob die Alexandroff-Kompaktifizierung *funktoriell* ist, das heißt, ob es zu jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine stetige Fortsetzung $f'\colon X' \to Y'$ mit $f'|_X = f$ und $f(\infty_X) = \infty_Y$ gibt, wobei ∞_X, ∞_Y die zusätzlichen Punkte bezeichne. Nach Konstruktion ist f' genau dann stetig bei ∞_X, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

1.68. Definition. Eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich,* wenn die Urbilder aller kompakten Teilmengen wieder kompakt sind.

1.h. Produkte kompakter Räume

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Tychonoff, wonach beliebige Produkte kompakter Räume wieder kompakt sind. Es handelt sich hier um einen der tieferen Sätze dieser Vorlesung, auch wenn der Beweis am Ende relativ kurz sein wird. Das liegt daran, dass wir einen Großteil der Schwierigkeit in den Begriff des Ultrafilters und die Charakterisierung kompakter Mengen verschieben. Wir brauchen hier das Auswahlaxiom in Gestalt des Lemmas von Zorn, um zu zeigen, dass jeder Filter zu einem Ultrafilter verfeinert werden kann. Man kann sogar zeigen, dass das Auswahlaxiom zum Satz von Tychonoff äquivalent ist.

Der Satz von Tychonoff wird an manchen Stellen in der Mathematik benutzt. In der Funktionalanalysis zeigt man mit seiner Hilfe den Satz von Banach-Alaoglu, wonach der Einheitsball in einem Banach-Raum „schwach*-kompakt" ist. Da man aber häufig mit Folgen argumentiert, braucht man stattdessen oft das Resultat, das der Einheitsball in einem Banach-Raum „schwach*-folgenkompakt" ist, und das ist deutlich leichter zu zeigen. Wir konstruieren als Anwendung des Satzes von Tychonoff hier die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes. Im Gegensatz zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung besteht die Idee darin, so viele Punkte hinzufügen, dass sich jede stetige beschänkte Funktion auf die Kompaktifizierung fortsetzen lässt.

1.69. Definition. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X heißt *Ultrafilter,* wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

1.70. Satz. *Es sei X eine Menge.*

(1) *Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf X lässt sich zu einem Ultrafilter verfeinern.*
(2) *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Zu (1) betrachten wir die Menge $\Phi \subset \mathcal{P}\mathcal{P}X$ aller Filter auf X, die feiner sind als $\mathcal{F}$. Sie wird durch die Relation „$\subset$" geordnet. Jede totalgeordnete Teilmenge $\Psi \subset \Phi$ besitzt eine obere Schranke

$$\bigcup \Psi = \bigcup_{\mathcal{G} \in \Psi} \mathcal{G} \subset \mathcal{P}X \;,$$

und $\bigcup \Psi$ ist wieder ein Filter. Nach dem Lemma von Zorn enthält Φ ein maximales Element, und das ist nach Definition ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ verfeinert.

Zu (2) betrachte $A \subset X$ und einen Filter $\mathcal{F}$. Wegen der Filteraxiome (1) und (2) kann es keine Elemente B, $C \in \mathcal{F}$ geben mit $B \subset A$ und $C \subset X \setminus A$, denn dann wäre $\emptyset = B \cap C \in \mathcal{F}$. Also gilt entweder $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, oder $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Ohne Einschränkung gelte ersteres. Dann betrachten wir einen neuen Filter

$$\mathcal{G} = \left\{\, G \subset X \;\middle|\; \text{es gibt } F \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap F \subset G \,\right\} \,,$$

der $\mathcal{F}$ verfeinert und A enthält. Wenn $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ uns damit insbesondere $A \in \mathcal{F}$. □

Der entscheidende Schritt im Beweis des Satzes von Tychonoff ist die folgende Charakterisierung quasikompakter Räume.

1.71. Proposition. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Der Raum X ist quasikompakt.*
(2) *Es sei $\mathcal{A}$ ein System abgeschlossener Teilmengen von X, so dass $\emptyset \neq A_1 \cap \dots \cap A_k$ für je endlich viele $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$. Dann folgt $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{A}$.*
(3) *Jeder Ultrafilter auf X hat einen Grenzwert.*

Wir könnten einen Raum X "filterkompakt" nennen, wenn jeder Filter auf X eine konvergente Verfeinerung besitzt. Zusammen mit Satz 1.70 (1) zeigt die obige Proposition, dass überdeckungs- (quasi-) kompakt das gleiche wie filter- (quasi-) kompakt bedeutet.

Beweis. „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“: Hierzu benutzen wir, dass die offenen Mengen $X \setminus A$ für $A \in \mathcal{A}$ genau dann eine Überdeckung von X bilden, wenn $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ gilt. Entsprechendes gilt für eine endliche Auswahl dieser Mengen. Daher sind diese beiden Aussagen äquivalent.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Wir betrachten

$$\mathcal{A} = \{\, A \in \mathcal{F} \bigm| A \text{ abgeschlossen} \,\} \subset \mathcal{F} \;.$$

Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, ist jeder endliche Durchschnitt von Elementen von $\mathcal{A}$ nicht leer, nach (2) existiert also mindestens ein Punkt $x \in \bigcap \mathcal{A}$. Es folgt $\mathcal{F} \to x$, denn sei $U \in \mathcal{U}_x$ Umgebung von U, dann ist $A = X \setminus \mathring{U}$ abgeschlossen mit $x \notin A$, folglich $A \notin \mathcal{A}$, und somit $A \notin \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathring{U} \in \mathcal{F}$ nach Satz 1.70 (2), und da $\mathring{U} \subset U$ auch $U \in \mathcal{F}$, was zu zeigen war.

„(3) $\Rightarrow$ (2)“: Es sei $\mathcal{A}$ wie in (2) gegeben. Da endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{A}$ nie verschwinden, ist

$$\mathcal{G} = \{\, U \subset X \bigm| \text{es gibt } A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A} \text{ mit } A_1 \cap \dots \cap A_k \subset U \,\} \subset \mathcal{P}X$$

ein Filter auf X. Nach Satz 1.70 (1) lässt sich $\mathcal{G}$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ verfeinern, und nach Voraussetzung existiert $x \in X$ mit $\mathcal{F} \to x$. Sei $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, insbesondere $X \setminus A \notin \mathcal{U}_x$, folglich ist die offene Menge $X \setminus A$ keine Umgebung von x. Also gilt $x \notin X \setminus A$, das heißt $x \in A$. Da x in allen Elementen aus $\mathcal{A}$ enthalten ist, ist insbesondere $\bigcap \mathcal{A}$ nicht leer. □

1.72. Satz (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum $\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$ genau dann quasikompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ quasikompakt sind.*

Da sich die Hausdorff-Eigenschaft nach Satz 1.57 (2) analog verhält, darf man im obigen Satz auch „quasikompakt“ überall durch „kompakt“ ersetzen.

Man beachte, dass die ensprechende Aussage für die Box-Topologie aus Bemerkung 1.56 bei unendlichen Indexmengen falsch wird.

Beweis. Die Richtung „$\Longrightarrow$“ ist analog zu Übung 1.141, also beschränken wir uns auf „$\Longleftarrow$“. Es sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein beliebiges Produkt quasikompakter topologischer Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ mit den natürlichen Abbildungen $\pi_i \colon X \to X_i$. Gegeben sei ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{F}$ gegen ein Element $x \in X$ konvergiert.

Wir betrachten die Bildfilter $\pi_i \mathcal{F}$ auf X_i aus Definition 1.46. Mit der Charakterisierung aus Satz 1.70 (2) überprüft man, dass die $\pi_i \mathcal{F}$ wieder Ultrafilter sind. Also existiert ein Grenzwert $x_i \in X_i$ von $\pi_i \mathcal{F}$, und wir betrachten $x = (x_i)_{i \in I} \in X$.

Sei jetzt $U \subset X$ eine Umgebung von x. Zu zeigen ist $U \in \mathcal{F}$ nach Definition 1.44 (1). Nach Definition der Produkttopologie existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und Umgebungen $U_i \subset X_i$ für alle $i \in I_0$, so dass

$$\bigcap_{i \in I_0} \pi_i^{-1}(U_i) \subset U \;.$$

Da $\pi_i \mathcal{F} \to x_i$, folgt $U_i \in \pi_i \mathcal{F}$, also $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$ nach Definition 1.46. Aber dann ist der endliche Durchschnitt dieser Mengen wieder in $\mathcal{F}$ enthalten, und damit auch seine Obermenge U. Es folgt $\mathcal{F} \to x$. □

Man beachte, dass man im Beweis erneut das Auswahlaxiom anwenden muss, um x zu bestimmen, falls die einzelnen Grenzwerte $x_i \in X_i$ nicht eindeutig sind (was passieren kann, wenn die X_i nicht Hausdorff sind).

Wir haben in Satz 1.67 die Alexandroff-Kompaktifizierung X' eines topologischen Raumes X kennengelernt. Es ist nicht schwer zu sehen, dass es für jede Kompaktifizierung $X \hookrightarrow \overline{X}$ von X eine eindeutige Abbildung $\overline{X} \to X'$ gibt, die auf X selbst die Identität induziert. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung hat genau die umgekehrte Eigenschaft.

1.73. Satz (Stone-Čech-Kompaktifizierung). *Es sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann existiert eine Kompaktifizierung $X \hookrightarrow \beta X$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to K$ von X in einen kompakten Raum K existiert genau eine stetige Fortsetzung $\beta f\colon \beta X \to K$.*

Da es sehr viele kompakte Räume K und dementsprechend auch sehr viele stetige Abbildungen $X \to K$ gibt, ist es nicht auf Anhieb klar, dass solch eine Kompaktifizierung überhaupt existiert. Und tatsächlich bemühen wir im Beweis indirekt wieder das Auswahlaxiom.

In Übung 1.142 sehen wir, dass kompakte Räume normal sind, und aus Satz 1.57 wissen wir, dass Unterräume normaler Räume zumindest noch vollständig regulär sind. Das bedeutet, dass vollständige Regularität sowohl notwendig als auch hinreichend für die Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist.

1.74. Bemerkung. Es sei X ein topologischer Raum.

(1) Alle Kompaktifizierungen von X bilden eine Kategorie. Ihre Objekte sind Kompaktifizierungen $\iota\colon X \to K$, und ein Morphismus zwischen zwei Kompaktifizierungen $\iota_i\colon X \to K_i$ für $i = 0, 1$ ist eine Abbildung $F\colon K_0 \to K_1$, so dass $\iota_1 = F \circ \iota_0$. Die Axiome aus Definition 1.19 lassen sich leicht überprüfen.

(2) Wenn X vollständig regulär ist, sei $\iota_X\colon X \to \beta X$ eine Stone-Čech-Kompaktifizierung von X. Sie ist ein sogenanntes initiales Objekt, das heißt, für jede andere Kompaktifizierung $\iota\colon X \to K$ existiert genau ein Morphismus $F\colon \beta X \to K$. Wie bei jeder universellen Eigenschaft folgt auch hier, dass die Stone-Čech-Kompaktifizierung bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Tatsächlich gibt es verschiedene Möglichkeiten, sie zu konstruieren, aber alle führen am Ende auf homöomorphe Räume.

(3) Wenn X lokalkompakt ist, dann bildet die Alexandroff-Kompaktifizierung X' aus Satz 1.67 ein terminales Objekt, das heißt, für jede andere Kompaktifizierung $\iota\colon X \to K$ existiert genau ein Morphismus $F\colon K \to X'$. Dieser Morphismus bildet alle Punkte in $K \setminus \operatorname{im} \iota$ auf den unendlich fernen Punkt ∞ ab. Aus dieser universellen Eigenschaft folgt entsprechend auch die Eindeutigkeit der Alexandroff-Kompaktifizierung.

Gegeben sei ein beliebiger topologischer Raum X, und I bezeichne wieder das Einheitsintervall $[0, 1]$ mit der Standard-Topologie. Wir betrachten den Raum

$$BX = \operatorname{Abb}(C(X, I), I) = \prod_{u \in C(X,I)} I$$

mit der Produkt-Topologie. Ein typisches Element von BX ist ein Tupel $(t_u)_{u\in C(X,I)}$ von Zahlen $t_u \in I$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert eine Abbildung $Bf\colon BX \to BY$ mit

$$Bf\big((t_u)_{u\in C(X,I)}\big) = (t_{v\circ f})_{v\in C(X,I)} ,$$

denn für alle $v \in C(Y, I)$ ist $v \circ f \in C(X, I)$ ein zulässiger Index für die Familie $(t_u)_{u\in C(X,I)}$. Indem wir Funktionen u an Punkten $x \in X$ auswerten, erhalten wir eine Abbildung

$$\iota_X\colon X \to BX \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto (u(x))_{u\in C(X,I)} \in BX .$$

Wir zeigen unten, dass $\beta X = \overline{\operatorname{im} \iota_X} \subset BX$ die gesuchte Kompaktifizierung liefert. Aber zunächst beweisen wir einige elementare Aussagen über die obige Konstruktion.

1.75. LEMMA. *Es seien X ein topologischer Raum, dann ist $\iota_X\colon X \to BX$ stetig. Sie ist genau dann injektiv, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Funktion $u\colon X \to I$ mit $u(x) \neq u(y)$ existiert.*

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist die induzierte Abbildung $Bf\colon BX \to BY$ ebenfalls stetig, und es gilt $\iota_Y \circ f = Bf \circ \iota_X$.

Später werden wir B einen Funktor nennen, und ι eine natürliche Transformation.

BEWEIS. Für $v \in C(X,I)$ bezeichne

$$\pi_v\colon BX \to I \qquad \text{mit} \qquad \pi_v\bigl((t_u)_{u\in C(X,I)}\bigr) = t_v$$

die Projektion auf den v-ten Faktor I des Produktes. Nach Konstruktion gilt $\pi_v \circ \iota_X = v\colon X \to I$, denn

$$(\pi_v \circ \iota_X)(x) = \pi_v\bigl((u(x))_{u\in C(X,I)}\bigr) = v(x)$$

für alle $x \in X$, und die Abbildung $\pi_v \circ \iota_X = v$ ist stetig. Als Abbildung in ein Produkt ist ι_X stetig nach der charakteristischen Eigenschaft des Produkts aus Satz 1.53 (2), da $v = \pi_v \circ \iota_X$ für alle $v \in C(X.I)$ stetig ist. Die Aussage über Injektivität folgt unmittelbar aus der Konstruktion von ι_X.

Als nächstes sei $f\colon X \to Y$ stetig und $Bf\colon BX \to BY$ wie oben definiert. Um zu zeigen, dass Bf stetig ist, reicht es zu zeigen, dass $\pi_w \circ Bf\colon BX \to I$ für alle $w \in C(Y,I)$ stetig ist. Da

$$\pi_w \circ Bf\bigl((t_u)_{u\in C(X,I)}\bigr) = \pi_w\bigl((t_{v\circ f})_{v\in C(Y,I)}\bigr) = t_{w\circ f}\ ,$$

gilt $\pi_w \circ BF = \pi_{w\circ f}\colon BX \to I$, und die Projektionsabbildung $\pi_{w\circ f}$ ist stetig nach Satz 1.53 (1).

Für einen Punkt $x \in X$ gilt schließlich

$$(Bf \circ \iota_X)(x) = Bf\bigl((u(x))_{u\in C(X,I)}\bigr) = \bigl((v\circ f)(x)\bigr)_{v\in C(Y,I)} = \bigl(v(f(x))\bigr)_{v\in C(Y,I)} = (\iota_Y \circ f)(x)\ ,$$

folglich $Bf \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. □

BEWEIS von Satz 1.73. Wenn X vollständig regulär ist, behaupten wir, dass $\iota_X\colon X \to BX$ eine Einbettung ist, Zu zeigen ist, dass ι_X einen Homöomorphismus $X \to \operatorname{im}\iota_X \subset BX$ induziert. Aus dem obigen Lemma folgt, dass ι_X stetig und aufgrund der vollständigen Regularität auch injektiv ist. Also reicht es zu zeigen, dass das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ in der Unterraumtopologie auf $\operatorname{im}\iota_X \subset BX$ offen ist. Dazu sei $x \in U$. Da X vollständig regulär ist, finden wir eine stetige Funktion $v\colon X \to I$ mit $v(x) = 0$ und $v|_{X\setminus U} \equiv 1$. Nach einer Rechnung im obigen Beweis gilt $\pi_v \circ \iota_X = v\colon X \to I$. Insbesondere ist die Menge $\pi_v^{-1}([0,1)) \subset BX$ offen, und

$$\iota_X(x) \in \pi_v^{-1}([0,1)) \cap \operatorname{im}\iota_X \subset \iota_X(U)\ , \qquad \text{da } \{x\} \in v^{-1}([0,1)) = \iota_X^{-1}\bigl(\pi_v^{-1}([0,1))\bigr) \subset U$$

nach Wahl von v. Also ist $\iota_X(U)$ eine Umgebung vom Punkt $\iota_X(x)$. Da das für alle Punkte $x \in U$ gilt, ist $\iota_X(U)$ offen in der Unterraumtopologie. Somit ist ι_X eine Einbettung.

Nach dem Satz 1.72 von Tychonoff ist der Raum BX als Produkt vieler Kopien des kompakten Raums I wieder kompakt. Dann ist der Abschluss $\beta X = \overline{\operatorname{im}\iota_X}$ ebenfalls kompakt nach Bemerkung 1.59 (1). Außerdem ist $\operatorname{im}\iota_X$ homöomorph zu X und liegt dicht in βX, also ist $\iota_X\colon X \to \beta X$ eine Kompaktifizierung von X gemäß Definition 1.66.

Zu zeigen ist noch die universelle Eigenschaft. Dazu sei $f\colon X \to K$ eine stetige Abbildung in ein Kompaktum K. Wir wenden die obige Konstruktion auf K an. Da K kompakt und BK ein Hausdorff-Raum ist, ist $\operatorname{im}\iota_K \subset BK$ kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.59 (2) und (5), also gilt $\beta K = \operatorname{im}\iota_K$. Nach Lemma 1.75 gilt $Bf \circ \iota_X = \iota_K \circ f$, also bildet Bf die Teilmenge $\operatorname{im}\iota_X$ nach $\operatorname{im}\iota_K$ ab. Wir behaupten, dass Bf auch den Abschluss $\overline{\operatorname{im}\iota_X}$ nach $\operatorname{im}\iota_K = \overline{\operatorname{im}\iota_K}$ abbildet. Denn $BK \setminus \operatorname{im}\iota_K$ ist offen, folglich auch

$$Bf^{-1}(BK \setminus \operatorname{im}\iota_K) = BX \setminus Bf^{-1}(\operatorname{im}\iota_K)\ .$$

Da $\operatorname{im}\iota_X \subset Bf^{-1}(\operatorname{im}\iota_K)$, folgt $\overline{\operatorname{im}\iota_X} \subset Bf^{-1}(\operatorname{im}\iota_K)$, was zu zeigen war. □

1.76. Beispiel. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist eher ein theoretisches Hilfsmittel als eine konkrete Konstruktion, mit der man explizit rechnen möchte. Wir geben die folgenden Beispiele daher ohne weitere Erläuterungen.

(1) Obwohl es so aussieht, als ob dem halboffenenen Intervall $(0,1]$ nur der Punkt 0 zur Kompaktheit fehle, ist $I = [0,1]$ nicht seine Stone-Čech-Kompaktifizierung, denn die stetige Funktion $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ lässt sich nicht auf I fortsetzen.
(2) Man kann zeigen, dass $\beta\mathbb{N}$ genau so viele Elemente hat, wie es beliebige Abbildungen $I \to I$ gibt [**Que**, Satz 12.21]. Insbesondere ist $\beta\mathbb{N}$ damit sogar mächtiger als $\mathbb{R}$.
(3) Sei andererseits $(-\infty,\omega_1)$ wie in Bemerkung 1.41 konstruiert. Dann ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung zur Alexandroff-Kompaktifizierung isomorph [**Que**, Satz 12.22]. Folglich hat dieser Raum wegen Bemerkung 1.74 bis auf Isomorphie nur eine einzige Kompaktifizierung.

1.i. Quotienten und Verklebung

In Abschnitt 1.f hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrere Räume zu einem neuen verkleben.

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann bezeichne $\coprod_i X_i$ die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und $\iota_i\colon X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ sei die Inklusion der Menge X_i in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen X_i nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times X_i \quad\subset\quad I\times\bigcup_{i\in I} X_i \qquad\text{und}\qquad \iota_i(x_i) = (i,x_i)\;.$$

1.77. Definition. Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der X_i ist definiert als

$$\coprod_i (X_i,\mathcal{O}_i) = \Bigl(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup\Bigr) \qquad\text{mit}\qquad \mathcal{O}_\sqcup = \Bigl\{\,U\subset\coprod_i X_i \Bigm| \iota_i^{-1}(U)\in\mathcal{O}_i \text{ für alle } i\in I\,\Bigr\}\;.$$

Wenn wir X_i mit der Teilmenge $\iota_i(X_i)\subset\coprod_i X_i$ identifizieren, dann ist $U\subset\coprod_i X_i$ genau dann offen, wenn $U\cap X_i$ für alle $i\in I$ in X_i offen ist.

Wir überprüfen, dass $\mathcal{O}_\sqcup$ eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung ι_i^{-1} aus, nämlich

$$\iota_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset\in\mathcal{O}_i\;,\qquad \iota_i^{-1}(X) = X_i\in\mathcal{O}_i\;,$$
$$\iota_i^{-1}(U_i\cap\dots\cap U_k) = \iota_i^{-1}(U_i)\cap\dots\cap\iota_i^{-1}(U_k)\in\mathcal{O}_i \qquad\text{und}\qquad \iota_i^{-1}\Bigl(\bigcup\mathcal{U}\Bigr) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}}\iota_i^{-1}(U)\in\mathcal{O}_i$$

für $U_1, \dots, U_k\in\mathcal{O}$ und $\mathcal{U}\subset\mathcal{O}$.

1.78. Satz. *Sei $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.*

(1) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup$ ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_i X_i$, für die alle Inklusionsabbildungen $\iota_i\colon X_i\hookrightarrow\coprod_i X_i$ stetig sind.*
(2) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf $\coprod_i X_i$, so dass eine beliebige Abbildung F von $(\coprod_i X_i,\mathcal{O})$ in einen beliebigen topologischen Raum $(Z,\mathcal{O}_Z)$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $F\circ\iota_i\colon(X_i,\mathcal{O}_i)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ stetig sind.*

(3) *Der Raum* $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$ *zusammen mit den Inklusionsabbildungen* $\big(\iota_i \colon X_i \to \coprod_i X_i\big)_{i \in I}$ *ist ein* Koprodukt *der Räume* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ *in der Kategorie* $\mathcal{T}op$, *das heißt, dass zu jedem Objekt* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *und jeder Familie von Morphismen* $(F_i \colon X_i \to Z)_{i \in I}$ *genau ein Morphismus* $F \colon \coprod_i X_i \to Z$ *existiert, so dass* $F_i = F \circ \iota_i$ *für alle* $i \in I$.

1.79. Bemerkung. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "F \circ \iota_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\big) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "F_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit stetigen Abbildungen $\iota_i \colon X_i \to Y$ ist genau dann ein *Koprodukt* im Sinne von Satz 1.78 (3), wenn zu jedem Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit stetigen Abbildungen $F_i \colon X_i \to Z$ genau eine stetige Abbildung F wie im rechten Diagramm existiert.

Wie in Bemerkung 1.54 kann man zeigen, dass es zwischen je zwei Koprodukten der Objekte $(X_i)_{i \in I}$ genau einen Isomorphismus gibt, der mit den Inklusionsabbildungen verträglich ist. Und wie beim Produkt muss man auch bei Koprodukten in einer gegebenen Kategorie die Existenz „von Hand" nachweisen, beispielsweise, indem man eine Konstruktion angibt und zeigt, dass sie die richtigem Eigenschaften hat.

Da sich die beiden Diagramme in (1.1) und (1.2) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.52 und 1.77 seien zueinander *dual.* Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „$\prod$" und „$\coprod$".

Beweis des Satzes 1.78. Zu (1) sei $\mathcal{O}$ eine beliebige Topologie auf $\coprod_i X_i$. Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen $\iota_i \colon X_i \to \coprod_i X_i$ stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \qquad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$.

Zu (2) seien $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und $F \colon (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ wie im Satz vorgegeben. Wenn F stetig ist, sind alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, da ι_i nach (1) stetig ist. Seien jetzt alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, und sei $U \subset Z$ offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}\big(F^{-1}(U)\big) = \big(F \circ \iota_i\big)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in X_i für alle $i \in I$. Nach Definition 1.77 gilt $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$, also ist F stetig. Der Beweis der Eindeutigkeit ist wieder analog zum Beweis der Sätze 1.50 (2) und (1.53) (2).

Zu (3) seien $f_i \colon X_i \to Z$ stetig. Die einzige Abbildung $f \colon \coprod_i X_i \to Z$ mit $f \circ \iota_i = f_i$ für alle i wird gegeben durch

$$f\big(\iota_i(x_i)\big) = f_i(x_i) \;,$$

und f ist stetig nach (2). $\square$

Das nächste Resultat ist das Pendant zu Satz 1.57.

1.80. Satz. *Die Trennungseigenschaften (T0) – (T4) und (T3a) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt. Die Eigenschaft (A2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist. Quasikompaktheit und Kompaktheit werden vererbt, wenn die Indexmenge endlich ist.*

Beweis. Man kann die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen U und $V \subset \coprod_{i\in I} X_i$ konstruieren, in dem man für alle $i \in I$ offene Teilmengen $\iota_i^{-1}(U)$, $\iota_1^{-1}(V) \subset X_i$ angibt. Im Falle von (T4) muss man unter Umständen auf jedem Summanden X_i Wahlen treffen und benötigt daher das Auswahlaxiom. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man auf dem Summanden X_i, der den ausgezeichneten Punkt x enthält, eine Funktion f_i vorgibt und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.78 (3) auf allen anderen Summanden durch 0 fortsetzt.

Sei $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \coprod_{i\in I} X_i$, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x_j in X_j, dann ist $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\coprod_{i\in I} X_i)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn I abzählbar ist und $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$, dann ist

$$\bigcup_{i\in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_\sqcup$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Sei schließlich $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung einer disjunkten Vereinigung X quasikompakter Räume $X_1, \dots, X_n$, dann reichen je endliche offene Mengen aus $\mathcal{U}$ aus, um einen Raum X_i zu überdecken. Also reichen insgesamt endlich viele. $\square$

1.81. Bemerkung. Es sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und X eine Menge.

(1) Gegeben Abbildungen $f_i \colon X \to X_i$ für alle $i \in I$, existiert stets eine eindeutige gröbste Topologie $\mathcal{O}$ auf X, für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie $\mathcal{O}$ heißt die von den f_i *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie*. Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.50 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.53 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls $I = \emptyset$.

(2) Seien umgekehrt Abbildungen $f_i \colon X_i \to X$ für alle $i \in I$ gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie $\mathcal{O}$ auf X, für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die von den f_i *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie*. Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.78 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls $I = \emptyset$.

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.78, 1.50 und 1.53. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen f_i, definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung $\iota \colon Y \hookrightarrow X$ in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ von einem gegebenen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in eine Menge Y. Dabei können wir Y als Quotienten $Y = X/\sim$ nach einer Äquivalenzrelation $\sim$ auffassen, wobei

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi(x) = \pi(y) .$$

1.82. Definition. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf Y durch

$$\mathcal{O}_Y = (\pi^{-1})^{-1}(\mathcal{O}_X) = \{\, U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \,\} .$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass $\mathcal{O}_Y$ tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.83. Satz. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung.*

(1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf Y, für die $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ stetig ist.*

(2) *Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf Y, für die eine Abbildung f von Y in einen beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi \colon X \to Z$ stetig ist.*

1.84. Bemerkung. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

$$\begin{tikzcd} & (X, \mathcal{O}_X) \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[ur, "\iota \circ F"] \arrow[r, "F"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, "f \circ \pi"] & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "f"'] & (Z, \mathcal{O}_Z) \end{tikzcd}$$

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.50 (2), das rechte die aus Satz 1.83 (2).

Beweis von Satz 1.83. Damit $\pi \colon X \to Y$ stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen $U \subset Y$ mit $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ offen sein, also gilt (1).
Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.50 (2) und drehen alle Pfeile um. $\square$

1.85. Bemerkung. Sei $p \colon (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ surjektiv, und $\mathcal{O}_Y$ sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von X auf Y vererben.

(1) Wenn X quasikompakt ist, dann ist auch Y quasikompakt, da $Y = p(X)$. Wenn X kompakt und Y Hausdorffsch ist, dann ist Y auch kompakt, vgl. Übung 1.141.
(2) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von X auf Y, wie die Übungen 1.154 und 1.156 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
(3) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.109 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation $\sim$ beziehungsweise die Abbildung $\pi \colon X \to X/\sim$ lassen sich einzelne Trennungsaxiome von X auf den Quotienten übertragen, siehe etwa Übung 1.157. Wir wollen das hier aber nicht vertiefen.

Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später zur Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$ eine Teilmenge, und seien $f \colon V \to X$ eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \,\dot\cup\, Y)/\sim ,$$

wobei $\sim$ die von $y \sim f(y)$ für alle $y \in V$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei *erzeugt* jede Teilmenge $S \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation R auf M, so dass aRb genau dann gilt, wenn es eine Kette $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$ von Elementen von M mit $k \geq 0$ und $(a_{i-1}, a_i) \in S$ oder $(a_i, a_{i-1}) \in S$ für alle $i = 1, \dots, k$ gibt. Die Punkte in V werden in unserem Fall entlang der Abbildung f an X „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf $X \cup_f Y$ heißt daher auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung $i \colon X \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist injektiv, die Abbildung $j \colon Y \to X \cup_f Y$ im allgemeinen jedoch nicht. Der Raum $W = X \cup_f Y$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines *Pushouts.*

$$\begin{tikzcd}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "j"] \arrow[urr, bend left, "h"] & (W, \mathcal{O}_W) \arrow[ur, dashed, "k"] & \\
(V, \mathcal{O}_V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

1.86. FOLGERUNG. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $V \subset Y$ und $f\colon V \to X$ beliebig. Der Raum $X \cup_f Y$ trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung $\pi\colon X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$. Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $g\colon X \to Z$ und $h\colon Y \to Z$ stetig.*

(1) *Es existiert genau dann eine Abbildung $k\colon X \cup_f Y \to Z$ mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, wenn $g \circ f = h|_V\colon V \to Z$, und k ist in diesem Fall eindeutig.*
(2) *In diesem Fall ist k stetig.*

BEWEIS. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\overline{k}\colon X \sqcup Y \to Z \quad \text{mit} \quad \overline{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \overline{k}|_Y = h\ ,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist. Damit k existiert, muss $\overline{k}$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \overline{k}(f(y)) = \overline{k}(y) = h(y) \qquad \text{für alle } y \in V\ .$$

Sei nun $k\colon X \cup_f Y \to Z$ eine Abbildung mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, dann gilt $(k \circ \pi)|_X = g$ und $(k \circ \pi)|_Y = h$, und es folgt $\overline{k} = k \circ \pi$ wegen Satz 1.78 (3). Da π surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von k.

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.78 (2), dass $\overline{k}$ stetig ist. Da $\overline{k} = k \circ \pi$, folgt aus Satz 1.83 (2) die Stetigkeit von k. □

Sei jetzt $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gerichtete Folge topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ für alle $i < j$ mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}\colon X_i \to X_k \qquad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\operatorname{colim} X_i = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \Big/ \sim\ , \tag{1.4}$$

wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \qquad \text{für ein } k > i,\ j.$$

1.87. FOLGERUNG. *Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ topologische Räume und $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ Abbildungen, so dass $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i < j < k$. Sei $\varinjlim X_i$ mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \to \varinjlim X_i$ versehen. Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $(h_i\colon X_i \to Z)_{i \in \mathbb{N}}$ seien stetige Abbildungen.*

(1) *Es existiert genau dann eine Abbildung $\ell\colon \varinjlim X_i \to Z$ mit $h_i = \ell \circ g_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wenn $h_j \circ f_{ji} = h_i\colon X_i \to Z$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und ℓ ist in diesem Fall eindeutig.*
(2) *In dieser Situation ist ℓ stetig.*

Also erfüllt $W = \varinjlim X_i$ die universelle Eigenschaft eines *Kolimes.*

$$\begin{tikzcd}
 & & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
(X_0, \mathcal{O}_0) \arrow[r, "f_{01}"] \arrow[urrr, bend left, "h_0"] \arrow[drrr, bend right, "g_0"'] & (X_1, \mathcal{O}_1) \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "h_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"] & \cdots & \\
 & & & (W, \mathcal{O}_W) \arrow[uu, dashed, "\ell"']
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Man nennt die obige Topologie auch die *schwache Topologie* auf $\operatorname{colim} X_i$. Sie ist die Finaltopologie zu den Abbildungen g_i.

Beweis. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.86. $\square$

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.3) und (1.5) als Spezialfälle, siehe Definition **??** und Bemerkung **??**.

1.j. Zusammenhang

Wir nennen einen Raum X zusammenhängend, wenn wir ihn nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Unterräume schreiben können, das heißt, wenn wir ihn nicht in Teile zerlegen können, die (im Sinne von Satz 1.78) "nichts miteinander zu tun haben". Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.88. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) *zusammenhängend,* wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ gibt mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$, und
(2) *wegzusammenhängend,* wenn zu je zwei $x, y \in X$ ein *Weg* γ von x nach y, das heißt, eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, existiert.

1.89. Bemerkung. Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

(1) Wenn $X = U \,\dot\cup\, V$ gilt und U, V offen sind, dann ist X homöomorph zu $U \sqcup V$, siehe Übung 1.158.
(2) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
(3) Es trage $Y = \{0,1\}$ die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $F\colon X \twoheadrightarrow Y$ gibt.

1.90. Beispiel. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn sie zusammenhängend ist. Zu "$\Rightarrow$" sei etwa $I = U \,\dot\cup\, V$ mit U, $V \subset I$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren $u \in U$ und $v \in V$, o.B.d.A. sei $u < v$. Setze $x = \inf(V \cap [u,v])$, dann enthält jede Umgebung von x sowohl Punkte von V als auch von U. Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U \;,$$

da sowohl U als auch V abgeschlossen sind, im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

Wenn I kein Intervall ist, existieren $x < y < z$ mit x, $z \in I$ und $y \notin I$. Dann ist

$$I = (I \cap (-\infty, y)) \,\dot\cup\, (I \cap (y, \infty))$$

eine Zerlegung wie in Definition 1.88 (1).

1.91. SATZ. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*

(2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Wir können (1) als eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes der Analysis auffassen. Außerdem folgt aus (1), dass sich (Weg-) Zusammenhang auf Quotienten vererbt.

BEWEIS. Sei $F\colon X \to Y$ stetig. Wenn $\operatorname{im} F \subset Y$ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen $U, V \subset \operatorname{im} F$ mit $\operatorname{im} F = U \dot\cup V$. Dann sind auch $F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(V)$ nicht leer, offen mit $X = F^{-1}(U) \dot\cup F^{-1}(V)$. Also ist auch X nicht zusammenhängend.

Sei X wegzusammenhängend und $F(x)$, $F(y)$ zwei beliebige Punkte in $\operatorname{im} F$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, dann ist $F \circ \gamma$ ein Weg von $F(x)$ nach $F(y)$ in $\operatorname{im} F$. Also ist auch $\operatorname{im} F$ wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen U, $V \subset X$ mit $X = U \dot\cup V$ gibt. Wähle $x \in U$ und $y \in V$. Dann kann es keinen Weg γ von x nach y geben, denn ansonsten wäre

$$[0,1] = \gamma^{-1}(U) \dot\cup \gamma^{-1}(V)$$

mit $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V)$ nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.90. □

1.92. BEMERKUNG. Aus der obigen Diskussion folgt, dass sich (Weg-) Zusammenhang auf Quotienten überträgt, aber nicht auf disjunkte Vereinigungen. In Übung 1.161 sehen wir, dass sich Wegzusammenhang auf beliebige Produkte überträgt. Auch Zusammenhang überträgt sich auf Produkte, siehe dazu [**En**, Theorem 6.1.15] und [**Que**, Satz 4.10].

1.93. DEFINITION. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$.

(1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von X, die x enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente* $K(x)$ von x.
(2) Die Menge aller Punkte y, die sich mit x durch einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von x.
(3) Der Raum X heißt *total unzusammenhängend,* wenn $\{x\}$ die Zusammenhangskomponente von x ist für alle $x \in X$.

1.94. BEMERKUNG. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.159.

(2) Seien x, $y \in X$, dann gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$, analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
(3) Aus Satz 1.91 (2) folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes x in $K(x)$ enthalten ist.
(4) Für alle $x \in X$ gilt

$$K(x) \subset \bigcap \left\{\, V \subset X \;\middle|\; x \in V,\ V \text{ ist offen und abgeschlossen} \,\right\} .$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.95. DEFINITION. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal (weg-) zusammenhängend,* wenn zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x eine (weg-) zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von x existiert.

1.96. BEMERKUNG. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später oft mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

1.k. Funktionenräume und die kompakt-offene Topologie

Gegeben zwei (topologische) Räume X, Y, hat man in der Regel viele Möglichkeiten, eine Topologie auf dem Raum $\mathrm{Abb}(X,Y)$ aller Abbildungen oder geeigneten Unterräumen (wie zum Beispiel dem Raum $C(X,Y)$ der stetige Abbildungen) zu definieren. Oft benötigt man dazu zusätzliche Strukturen wie Metriken, Maße oder differenzierbare Strukturen. Beispiele sind Räume wie $C^k(X)$, $C^{k,\alpha}(X)$, $L^p(X)$ oder $W^{k,p}(X)$. Die Topologien auf diesen Räumen kann man mit den Methoden dieser Vorlesung betrachten und mit anderen Topologien auf dem gleichen oder einem ähnlichen Raum vergleichen. Das passiert in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder auch partielle Differentialgleichungen (siehe zum Beispiel die Sätze von Rellich und Sobolev).

Es gibt einige wenige interessante Topologien auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ oder $C(X,Y)$, die man allein mit Hilfe der Topologien auf X und Y definieren kann. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ haben wir in Gestalt der Produkttopologie in Definition 1.52 kennengelernt, siehe Übung 1.140. Für sie braucht man nur eine Topologie auf Y. In diesem Abschnitt betrachten wir eine andere Topologie auf $C(X,Y)$, die die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz verallgemeinert. Diese Topologie spielt nicht nur in Teilen der reellen und komplexen Analysis eine wichtige Rolle, sondern auch später in der algebraischen Topologie. Wir werden in Abschnitt **??** noch ausführlich auf sie zurückkommen.

1.97. Definition. Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie* $\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}$ auf $C(X,Y)$ definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathrm{ko}} &= \left\{\, S_{u,K,U} \;\middle|\; K \text{ kompakt, } u\colon K \to X \text{ stetig und } U \subset Y \text{ offen} \,\right\} \\ \text{mit} \qquad S_{u,K,U} &= \left\{\, f \in C(X,Y) \;\middle|\; \operatorname{im} u \subset f^{-1}(U) \,\right\} . \end{aligned}$$

So, wie es in der Literatur verschiedene Sichtweisen auf den Begriff „kompakt“ gibt, gibt es auch mehrere ähnliche Definitionen für die kompakt-offene Topologie. All diese Definitionen sind äquivalent, wenn die beteiligten Räume Hausdorffsch sind. Die obige Definition folgt Strickland [**St**].

1.98. Proposition (Funktorialität). *Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ und $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume. Dann induziert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ stetige Abbildungen*

$$\begin{aligned} & C(Z,X) \longrightarrow C(Z,Y) && \textit{mit} && g \longmapsto f \circ g && (1) \\ \textit{und} \quad & C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z) && \textit{mit} && h \longmapsto h \circ f \,. && (2) \end{aligned}$$

Den Beweis lassen wir als Übung 1.162. In Definition 2.16 führen wir Funktoren ein. Dann wird auch klar werden, was wir mit Funktorialität meinen.

1.99. Proposition. *Es seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$, $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume, und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ sei* lokalkompakt. *Dann ist die Verkettung*

$$\circ\colon C(Y,Z) \times C(X,Y) \longrightarrow C(X,Z) \tag{1}$$

stetig bezüglich der kompakt-offenen Topologien. Insbesondere gibt es eine stetige Auswertungsabbildung

$$\mathrm{ev}\colon C(Y,Z) \times Y \longrightarrow Z \,. \tag{2}$$

Wir können das leider nicht direkt aus Proposition 1.98 folgern, vergleiche Bemerkung 1.55.

Beweis. Nach Übung 1.128 reicht es für (1) zu zeigen, dass die Urbilder von Subbasismengen $S_{u,K,W} \subset C(X,Z)$ in $C(Y,Z) \times C(X,Y)$ offen sind. Dazu sei K kompakt, $u\colon K \to X$ stetig und $W \subset Z$ offen. Außerdem seien $f \in C(X,Y)$ und $g \in C(Y,Z)$ gegeben mit $g \circ f \in S_{u,K,W}$. Wir konstruieren ein Kompaktum L, eine stetige Abbildung $v\colon L \to g^{-1}(W) \subset Y$ und eine offene Teilmenge $V \subset \operatorname{im} v$ mit $\operatorname{im} u \subset f^{-1}(V)$. Dann folgt $f \in S_{u,K,V}$, $g \in S_{v,L,W}$ und

$$S_{v,L,W} \times S_{u,K,V} \subset \circ^{-1}(S_{u,K,W}) \,.$$

Also ist $\circ^{-1}(S_{u,K,W})$ eine Umgebung des Punktes (g,f). Da das für alle g, f mit $g\circ f\in S_{u,K,W}$ gilt, ist $\circ^{-1}(S_{u,K,W})$ offen, und somit die Verkettung eine stetige Abbildung.

Zur Konstruktion von V und L sei zunächst $y\in\operatorname{im}(f\circ u)\subset Y$. Da $g\circ f\in S_{u,K,W}$, folgt $y\in g^{-1}(W)$. Da Y lokalkompakt ist, hat y eine kompakte Umgebung $L_y\subset Y$. Als kompakter Raum ist L_y normal nach Übung 1.142, also finden wir eine offene Umgebung $V_y\subset L_y$ von y mit $\overline{V}_y\subset g^{-1}(W)$. Nun ist K kompakt und $f\circ u$ stetig, also reichen endlich viele Mengen der Form $(f\circ u)^{-1}(V_y)$ aus, um K zu überdecken; seien $y_1,\,\dots,\,y_N\in\operatorname{im}(f\circ u)$ die entsprechenden Punkte. Wir definieren

$$V=\bigcup_{i=1}^N V_{y_i}\;.$$

Die Teilmengen $\overline{V}_{y_i}\subset L_{y_i}$ sind kompakt, folglich auch ihre endliche disjunkte Vereinigung

$$L=\coprod_{i=1}^N \overline{V}_{y_i}\;.$$

Wir definieren $v\colon L\to Y$ als disjunkte Vereinigung der Inklusionsabbildungen $V_{y_i}\hookrightarrow Y$. Es folgt $\operatorname{im}(f\circ u)\subset V\subset\operatorname{im}v\subset g^{-1}(W)$ wie gefordert. Damit ist (1) bewiesen.

Zu (2) betrachten wir als Spezialfall den einpunktigen Raum $X=\mathrm{pt}$. Es gibt eine natürliche Bijektion $C(\mathrm{pt},Y)\cong Y$, die jeder Abbildung ihren Wert zuordnet. Sei K kompakt, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $c\colon K\to\mathrm{pt}$. Sei außerdem $V\subset Y$ offen, dann entspricht die Subbasismenge $S_{c,K,V}\subset C(\mathrm{pt},Y)$ genau der offenen Menge V, falls $K\neq\emptyset$ (und dem gesamten Raum Y, falls $K=\emptyset$). Insbesondere sind die Räume $C(\mathrm{pt},Y)$ und Y kanonisch homöomorph. Jetzt folgt (2) aus (1), denn wir erhalten ev als Verkettung stetiger Abbildungen

$$C(Y,Z)\times Y\xleftarrow{\cong}C(Y,Z)\times C(\mathrm{pt},Y)\xrightarrow{\circ}C(\mathrm{pt},Z)\xrightarrow{\cong}Z\;.\qquad\square$$

1.100. Proposition. *Es seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und $C(X,Y)$ trage die kompakt-offene Topologie. Dann gibt es eine stetige Abbildung*

$$\operatorname{in}\colon X\longrightarrow C(Y,X\times Y)\qquad\textit{mit}\qquad\operatorname{in}(x)(y)=(x,y)\;.$$

Zu jedem $x\in X$ gehört also eine *Inklusionsabbildung* $\operatorname{in}(x)$, die Y auf $\{x\}\times Y\subset X\times Y$ abbildet.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\operatorname{in}^{-1}(S_{u,K,W})\subset X$ für alle Kompakta K, alle stetigen Abbildungen $u\colon K\to Y$ und alle offenen Mengen $W\subset X\times Y$ offen ist. Sei dazu $x\in\operatorname{in}^{-1}(S_{u,K,W})$, das heißt, es gilt $\{x\}\times\operatorname{im}u\subset W$.

Nach Definition der Produkttopologie finden wir zu jedem Punkt $y\in\operatorname{im}u$ Umgebungen $U_y\subset X$ von x und $V_y\subset Y$ von y, so dass $U_y\times V_y\subset W$. Da K kompakt ist, reichen endlich viele der offenen Mengen $u^{-1}(V_y)$ aus, um K zu überdecken. Seien $y_1,\,\dots,\,y_N\in\operatorname{im}u$ die entsprechenden Punkte, dann ist

$$U=U_{y_1}\cap\dots\cap U_{y_N}\subset X$$

eine offene Umgebung von x mit $U\subset\operatorname{in}^{-1}(S_{u,K,W})$, denn

$$U\times\operatorname{im}u\subset(U_{y_1}\times V_{y_1})\cup\dots\cup(U_{y_N}\times V_{y_N})\subset W\;.\qquad\square$$

Seien X, Y, Z Mengen, dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{Abb}(X\times Y,Z)\cong\operatorname{Abb}(X,\operatorname{Abb}(Y,Z))\;,\qquad F\longmapsto f=\bigl(x\mapsto F(x,\,\cdot\,)\in\operatorname{Abb}(Y,Z)\bigr)\;.$$

Wenn wir Y^X für $\operatorname{Abb}(X,Y)$ schreiben, ließt sich das als „Exponentialgesetz“ $(z^y)^x=z^{xy}$. Da dies ein Beispiel einer formalen Adjunktion ist, nennen wir f und F zueinander *adjungiert*. Das andere Expontialgesetz $z^{x+y}=z^x\cdot z^y$ hat ebenfalls ein topologisches Analogon, das wir uns in Übung 1.165 anschauen.

1.101. Satz (Exponentialgesetz). *Es seien* $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *und* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *topologische Räume, und* $C(Y, Z)$ *trage die kompakt-offene Topologie* $\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}$.

(1) *Dann existiert eine injektive Abbildung*

$$\alpha\colon C(X \times Y, Z) \longrightarrow C(X, C(Y, Z)) \qquad \textit{mit} \qquad F \longmapsto (x \mapsto F(x, \,\cdot\,)) \;.$$

Sie ist stetig bezüglich der kompakt-offenen Topologien.

(2) *Die obige Abbildung* α *ist genau dann bijektiv für alle Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$, *wenn die Auswertungsabbildung*

$$\mathrm{ev}\colon C(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z \qquad \textit{mit} \qquad \mathrm{ev}(g, y) = g(y)$$

stetig ist. Das gilt insbesondere dann, wenn $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal kompakt ist.*

(3) *Wenn* $(X, \mathcal{O}_X)$ *Hausdorff und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal kompakt ist, ist die Abbildung* α *ein Homöomorphismus bezüglich der kompakt-offenen Topologien.*

Wir beweisen diesen Satz hier nicht vollständig. In Kapitel **??** gehen wir zu einer „angenehmen“ Unterkategorie $kw\mathcal{H}$ von $\mathcal{T}op$ über, in der der obige Satz nicht nur etwas einfacher zu beweisen ist, sondern auch ohne zusätzliche Voraussetzungen an X und Y gilt. In dieser Kategorie können wir die Bijektivität von α in (2) als universelle Eigenschaft des „internen hom-Funktors“ $C(Y, Z)$ deuten, falls wir $X \times Y$ schon kennen. Umgekehrt können wir es auch als universelle Eigenschaft des „Tensorproduktes“ $X \times Y$ lesen, wenn wir $C(Y, Z)$ schon kennen. Dann ergibt sich (3) durch abstrakte Überlegungen. In der Kategorie $\mathcal{T}op$ funktioniert all das leider nicht.

Beweis. Zu (1) sei eine stetige Abbildung $F\colon X \times Y \to Z$ gegeben. Wegen der Propositionen 1.98 (1) und (1.100) erhalten wir $\alpha(F) \in C(X, C(Y, Z))$ als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \xrightarrow{\mathrm{in}} C(Y, X \times Y) \xrightarrow{F\circ} C(Y, Z) \;.$$

Da die stetigen Abbildungen eine Teilmenge aller Abbildungen bilden, ergibt sich die Injektivität von α aus der Vorüberlegung. Die Stetigkeit von α beweisen wir hier nicht.

Zu (2) sei zunächst $\mathrm{ev}\colon C(Y, Z) \times Y \to Z$ stetig. Wir erhalten $f \in C(X, C(Y, Z))$ ein Urbild unter α als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_Y} C(Y, Z) \times Y \xrightarrow{\mathrm{ev}} Z \;.$$

Umgekehrt erhalten wir die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}\colon C(Y, Z) \times Y \to Z$ als Urbild von $\mathrm{id}_{C(Y,Z)}$ unter α für $X = C(Y, Z)$, denn für $g \in C(Y, Z)$ gilt

$$\alpha(\mathrm{ev})(g) = \mathrm{ev}(g, \,\cdot\,) = g = (\mathrm{id}_{C(Y,Z)} g) \;.$$

Den Beweis von (3) lassen wir wieder aus. □

1.102. Bemerkung. Es sei jetzt (Y, d) ein metrischer Raum.

(1) Eine Folge $(f_i)_i$ in $C(X, Y)$ konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn $(f_i)_i$ *gleichmäßig auf Kompakta* gegen f konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jeder stetigen Abbildung $u\colon K \to X$ von einem Kompaktum nach X und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d\big(f_i(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in K$ und alle $i \geq n$ gibt (Übung 1.163).

(2) Sei X lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert. Zur Erinnerung: in Analysis I wurde gezeigt, dass die Teilmenge der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Intervall I

unter gleichmäßiger Konvergenz in $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ folgenabgeschlossen ist. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, hätte lokal gleichmäßige Konvergenz dafür auch ausgereicht.

(3) Wenn X sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

(4) Wenn X eine *kompakte Ausschöpfung* besitzt, das heißt, wenn X als Vereinigung kompakter Mengen K_i mit $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann, können wir eine Metrik auf $C(X, Y)$ angeben, die die kompakt offene Topologie auf $C(X, Y)$ induziert, siehe Übung 1.164.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn X nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum Y.

1.l. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie. Während Mannigfaltigkeiten (oft mit Zusatzstruktur, zum Beispiel „differenzierbar") in der Geometrie eine große Rolle spielen, brauchen wir CW-Komplexe später für viele Konstruktionen in der (algebraischen) Topologie.

1.103. Definition. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit* der *Dimension* $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

1.104. Beispiel. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

(1) Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(2) Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol $(0, \dots, 0, \pm 1)$ aus auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

(3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind. Betrachte dazu die Abbildung

$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \qquad y \mapsto \frac{1}{r - |y - x|}\,(y - x)\,.$$

(4) Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, dann ist M, versehen mit der Unterraumtopologie, eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(5) Es sei $(-\infty, \omega_1)$ die geordnete Menge aus Bemerkung 1.41, dann versehen wir

$$X = \big((-\infty, \omega_1) \times [0, 1)\big) \setminus \{(0, 0)\}$$

mit der *lexikographischen Ordnung,* das heißt

$$(x, r) \prec (y, s) \quad \Longleftrightarrow \quad x \prec y \quad \text{oder} \quad \big(x = y \text{ und } r < s\big)$$

und der zugehörigen Ordnungstopologie. Dieser Raum heißt auch die (halb-) lange Gerade (die lange Gerade erhält man als Vereinigung zweier Kopien, von denen eine die umgekehrte Odnung trägt, und einem Punkt $(0, 0)$ genau dazwischen).

Man kann zeigen, dass X lokal zu $\mathbb{R}$ homömorph ist. Sei beispielsweise $\omega_0 = \sup \mathbb{N} \prec \omega_1$ die kleinste unendliche Ordinalzahl. Als Umgebung betrachten wir das Intervall $I = (-\infty, (\omega_0 + 1, 0)) \subset X$. Die Abbildung $I \to (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ mit

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} s & \text{falls } x = \omega_0, \text{ und} \\ -2^{-1-x}(2 - s) & \text{falls } x \prec \omega_0, \end{cases}$$

ist eine ordnungserhaltende Bijektion, also ein Homöomorphismus bezüglich der Ordnungstopologien. Aber X enthält überabzählbar viele disjunkte offene Teilmengen der Form $\{x\} \times (0,1)$, kann also keine abzählbare Basis haben.

1.105. Bemerkung. (1) Man beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ besitzt.

(2) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.28 und ähnliche Konstrukte auszuschliessen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden. Betrachte dazu etwa die obige (halb-) lange Gerade oder das Produkt aus dem Intervall $(0,1)$ mit einer überabzählbaren, diskreten Menge.
(3) Man kann zeigen, dass Mannigfaltigkeiten (T3) erfüllen, also regulär sind, daher nach dem Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.39), also insbesondere sogar normal.
(4) Wir werden später sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ genau dann isomorph, wenn $n = m$ gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^N$ einbetten kann, wenn N hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die einerseits noch halbwegs anschaulich, und andererseits für die meisten Konstruktionen in der algebraischen Topologie allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [**H1**] und auf Abschnitt **??**.

Wir bezeichnen mit $D^n = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ den abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitsball, und mit $\partial D^n = S^{n-1}$ seinen Rand. Hier wie auch im Folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

(1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum X^0, dem 0-*Gerüst* oder 0-*Skelett,* dessen Punkte wir auch 0-*Zellen* nennen.
(2) Sei das $(n-1)$-Gerüst X^{n-1} bereits induktiv konstruiert, sei I^n eine beliebige Indexmenge, und sei $(\varphi_i^n)_{i \in I^n}$ eine Familie stetiger Abbildungen von S^{n-1} nach X^{n-1}. Mit Satz 1.78 erhalten wir eine Abbildung

$$\varphi^n = \coprod_i \varphi_i^n \colon \coprod_i \partial D^n \to X^{n-1} \qquad \text{mit} \qquad \varphi^n(i,x) = \varphi_i^n(x) \; .$$

Dann konstruieren wir das n-Gerüst X_n, indem wir $\#I^n$-viele Kopien von D^n mit X^{n-1} entlang der Abbildung ϕ^n verkleben wie in Folgerung 1.86, siehe Diagramm (1.3):

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I^n} D^n \arrow[r, "\Phi^n"] & X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi^n} \coprod\limits_{i \in I^n} D^n \\
\coprod_{i \in I^n} S^{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi^n"] & X^{n-1} \arrow[u, hook] \; .
\end{tikzcd}$$

Mit Satz 1.78 zerfällt Φ^n wiederum als disjunkte Vereinigung einer Familie $(\Phi_i^n)_{i \in I^n}$ von Abbildungen von D^n nach X^n.
(3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit $X = X^n$, oder diesen Prozess für alle $n \in \mathbb{N}_0$ fortsetzen. In diesem Fall liefert Folgerung 1.87 den Kolimes

$$X = \operatorname{colim} X^n \; .$$

Als Menge ist X die aufsteigende Vereinigung der Räume $X^0 \subset X^1 \subset \dots$
Durch diese Konstruktionen ist die Topologie auf X induktiv durch die Abbildungen $\varphi_i^n \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ festgelegt.

1.106. Definition. Ein so konstruierter topologischer Raum X heißt *CW-Komplex.* Die Teilmenge $X^n \subset X$ heißt das *n-Gerüst* oder *n-Skelett*) von X. Die Abbildungen

$$\varphi_i^n \colon S^{n-1} \to X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen,* die

$$\Phi_i^n \colon D^n \to X^n \hookrightarrow X$$

charakteristische Abbildungen. Man nennt $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ eine (*offene*) *n-Zelle* und $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X.

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology,* siehe unten. Man beachte, dass offene Zellen als Teilmengen von X nicht notwendigerweise offen sind. Die Skelette, Zellen und charakteristischen Abbildungen hängen dabei nicht nur vom Raum X, sondern von der konkreten Konstruktion ab. Wir werden trotzdem später salopp von einem CW-Komplex X und seinen Gerüsten, Zellen etc. sprechen, auch wenn wir die genaue Konstruktion nicht immer angeben.

1.107. Beispiel. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

$$\begin{array}{lllll}
X = S^n & \text{mit} & X^0 = \dots = X^{n-1} = \mathrm{pt}\,, & & X^n = \dots = S^n\,; \\
& \text{oder mit} & X^j = S^j & \text{für } j \le n\,, & X^n = \dots = S^n\,; \\
X = \mathbb{R} & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}\,, & & X^1 = \dots = \mathbb{R}\,; \\
X = \mathbb{R}^2 & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^2\,, & X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}\,, & X^2 = \dots = \mathbb{R}^2\,; \\
X = \mathbb{R}^n & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^n\,, & \dots\,, & X^n = \dots = \mathbb{R}^n\,;
\end{array}$$

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.108. Proposition. *Es sei $X = \operatorname{colim} X^n$ mit $X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi^n} \coprod_{i \in I^n} D^n$ ein CW-Komplex.*

(1) *Für eine Teilmenge $U \subset X$ sind äquivalent:*
   (a) *U ist offen (abgeschlossen) in X,*
   (b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $U \cap X^n$ offen (abgeschlossen) in X^n,*
   (c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ ist $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ offen (abgeschlossen) in D^n.*
(2) *Für einen topologischen Raum Y und eine Abbildung $f \colon X \to Y$ sind äquivalent:*
   (a) *f ist stetig,*
   (b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f|_{X^n} \colon X^n \to Y$ stetig,*
   (c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ ist $f \circ \Phi_i^n \colon D^n \to Y$ stetig.*
(3) *Für alle n ist $X^n \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Die CW-Topologie auf X^n stimmt mit der Unterraumtopologie überein.*

Beweis. Die erste Äquivalenz in (1) ergibt sich aus der Konstruktion des Kolimes als Quotient der disjunkten Vereinigung aller X^n. Für die zweite Äquivalenz benutzen wir induktiv die Konstruktion des Pushouts.

Eigenschaft (2) folgt analog aus den universellen Eigenschaften des Kolimits und des Pushouts, siehe Folgerungen 1.86 und 1.87.

Zu (3) zeigen wir induktiv, dass X^n abgeschlossene Teilmenge von X^m ist für alle $m \ge n$. Im Induktionsschritt von $m-1$ auf m beachten wir, dass alle φ_i^m stetig und folglich alle $(\varphi_i^m)^{-1}(X^n)$

in S^{m-1} abgeschlossen sind. Da $S^{m-1} \subset D^m$ abgeschlossen ist, ist folglich auch $(\Phi_i^m)^{-1}(X^n) = (\varphi_i^m)^{-1}(X^n) \subset D^m$ abgeschlossen. Wegen (1) ist X^n in X abgeschlossen.

Eine Teilmenge $A \subset X^n$ ist in der CW-Topologie auf X^n nach (1) genau dann abgeschlossen, wenn $(\Phi_i^\ell)^{-1}(A)$ in D^ℓ abgeschlossen ist für alle $\ell \leq n$ und alle $i \in I^\ell$. Mit dem obigen induktiven Argument folgt, dass $(\Phi_i^\ell)^{-1}(A)$ in D^ℓ abgeschlossen ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^\ell$. Das ist äquivalent dazu, dass A in X abgeschlossen ist, und da X^n in X abgeschlossen ist, auch dazu, dass A in X^n mit der Unterraumtopologie abgeschlossen ist. Die Rückrichtung ist klar. □

1.109. Bemerkung. *CW*-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.36 (2). Als Beispiel betrachten wir einen *CW*-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \,\dot\cup\, \{*\} \;.$$

Wir wählen $I^1 = \mathbb{N}$ und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi_n^1 \colon \{-1, 1\} \to X^0 \qquad \text{mit} \qquad \varphi_n^1(-1) = * \qquad \text{und} \qquad \varphi_n^1(1) = n \;.$$

Unser *CW*-Komplex $X = X^1$ sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1, 1] \times \mathbb{N})/{\sim} \;,$$

wobei $(-1, m) \sim (-1, n)$ für alle m, $n \in \mathbb{N}$, während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind.

Es sei jetzt $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebungen des Punktes $*$. Für jedes n existiert also $\varepsilon_n > 0$, so dass $[-1, \varepsilon_n - 1) \subset (\Phi_n^1)^{-1}(U_n)$. Wir definieren

$$V = \coprod_{n\in\mathbb{N}} \Big[-1, \frac{\varepsilon_n}{2} - 1\Big) \Big/ {\sim} \subset X \;.$$

Nach Proposition 1.108 (1) ist das eine offene Umgebung von $*$ in X, aber für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \subset V$. Folglich hat $*$ keine abzählbare Umgebungsbasis.

Da der Raum $[-1, 1] \times \mathbb{N}$ sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.85 (3). Analog kann man zeigen, dass die CW-Topologie auf X echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir X als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.114 auffassen.

1.110. Satz. *CW-Komplexe sind normal.*

Beweis. Sei $X = \operatorname{colim} X^n$ ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in X abgeschlossen sind.

Sei also $x \in X$. Da $X = \operatorname{colim} X^n$, existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0 - 1}$. Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i \in I^{n_0}} e_i^{n_0} \;,$$

liegt x in genau einer Zelle $e_{i_0}^{n_0}$ von X^{n_0}. Also ist $\{x\}$ abgeschlossen in X^{n_0}, und wegen Proposition 1.108 (3) auch in X.

Anstelle von (T4) beweisen wir induktiv die äquivalente Formulierung aus Urysohns Lemma 1.29. Seien dazu A, $B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X^0 diskret ist, können wir mit einer beliebigen Funktion $f^0 \colon X^0 \to [0, 1]$ starten, so dass $f^0|_{A\cap X^0} \equiv 0$ und $f^0|_{B\cap X^0} \equiv 1$.

Sei $f^{n-1} \colon X^n \to [0, 1]$ gegeben, so dass $f^{n-1}|_{A\cap X^{n-1}} \equiv 0$ und $f^{n-1}|_{B\cap X^{n-1}} \equiv 1$. Da für alle $i \in I^n$ die Teilmenge $S^{n-1} \cup (\Phi_i^n)^{-1}(A) \cup (\Phi_i^n)^{-1}(B)$ in D^n abgeschlossen und D^n normal ist, finden wir nach dem Satz 1.32 von Tietze eine stetige Funktion $f_i^n \colon D^n \to [0, 1]$, so dass

$$f_i^n|_{S^{n-1}} = f^{n-1} \circ \varphi_i^n \;, \qquad f_i^n|_{(\Phi_i^n)^{-1}(A)} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad f_i^n|_{(\Phi_i^n)^{-1}(B)} \equiv 1 \;.$$

Die Funktionen f^{n-1} und $\coprod_{i\in I^n} f_i^n$ erfüllen die Verklebebedingung aus Folgerung 1.86 (1), also definieren sie zusammen eine stetige Funktion $f^n\colon X^n \to [0,1]$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Schließlich erfüllen die Funktionen $f^n\colon X^n \to X$ die analoge Bedingung aus Folgerung 1.87 (1) und definieren daher eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. $\square$

1.111. Definition. Ein *Unterkomplex* Y eines CW-Komplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von X besteht. Ein CW-Komplex heißt *endlich,* wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne n-Zellen e_i^n für $n > 0$ selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von $\bar{e}_i^n$ getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Proposition 1.108 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes $Y \subset X$ mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf Y^n mit der Unterraumtopologie von $Y^n \subset X^n$ vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle e_i^n nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von X ist, genausowenig ihr Rand $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$ (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.112. Satz. *Ein Unterraum A eines CW-Komplexes X ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossenen und in einem endlichen Unterkomplex von X enthalten ist.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Jede abgeschlossene Zelle $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.59 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in X abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.59 (1) kompakt.

„$\Longrightarrow$“: Es sei zunächst $B \subset X$ eine Teilmenge, so dass $B \cap e_i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ höchstens einen Punkt enthält. Wir behaupten, dass B in X abgeschlossen ist. Da X^0 ein diskreter Raum ist, ist $B \cap X^0$ in X^0 abgeschlossen. Sei jetzt $B \cap X^{n-1}$ in X^{n-1} abgeschlossen, dann ist für alle $i \in I^n$ auch $(\Phi_i^n)^{-1}(B \cap X^{n-1})$ in D^n abgeschlossen. Da $(\Phi_i^n)^{-1}(B)$ höchstens einen weiteren Punkt enthält, ist auch diese Teilmenge in D^n abgeschlossen. Folglich ist $B \cap X^n$ in X^n abgeschlossen, und damit nach Proposition 1.108 (1) auch B in X. Jede Teilmenge von B ist aus dem gleichen Grund abgeschlossen, also trägt B als Unterraum von X die diskrete Topologie.

Sei jetzt $A \subset X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen nach Bemerkung 1.59 (5). Wir wählen eine Teilmenge $B \subset A$, die für jede Zelle e_i^n mit $A \cap e_i^n \neq \emptyset$ genau einen Punkt $b_i^n \in A \cap e_i^n$ enthält. Dann ist B in A abgeschlossen und somit kompakt, und trägt die diskrete Topologie. Da ein diskreter kompakter Raum nur aus endlich vielen Punkten bestehen kann, kann ein kompakter Unterraum nur endlich viele offene Zellen treffen.

Zu zeigen bleibt, dass jede Zelle in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Für 0-Zellen ist das klar. Induktiv nehmen wir an, dass alle Zellen bis zur Dimension $n-1$ jeweils in endlichen Unterkomplexen enthalten sind. Der Rand einer n-Zelle e_i^n ist kompakt und trifft somit nur endlich viele Zellen; diese haben Dimension $< n$ und sind somit in endlichen Unterkomplexen enthalten. Also ist e_i^n in einer endlichen Vereinigung endlicher Unterkomplexe mit der Zelle e_i^n enthalten. $\square$

Aus der Kompaktheit von D^n folgt also insbesondere, dass das Bild $\overline{e_i^n}$ von Φ_i^n nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die in Proposition 1.108 (1) beschriebene Topologie gemeint. Und für alle $i \in I^n$ ist $\Phi_i^n|_{B^n}\colon B^n \to X$ eine Einbettung mit Bild e_i^n. Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.113. Satz (ohne Beweis, siehe [**H1**]). *Sei X ein Hausdorff-Raum und $(\Phi_i^n\colon D^n \to X)_{n\in\mathbb{N}_0, i\in I^n}$ für jedes n eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen Φ_i^n genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf X, wenn*

(1) *die Einschränkungen $\Phi_i^n|_{B^n}$ Einbettungen sind, und X als Menge die disjunkte Vereinigung ihrer Bilder e_i^n ist,*
(2) *die Bilder der $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$ jeweils nur endlich viele offene Zellen treffen,*
(3) *und eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ für alle n und alle $i \in I^n$ abgeschlossen ist.*

1.m. Übungen zu Kapitel 1

Übungen zu Abschnitt 1.a.

1.114. Übung. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x,y) = \begin{cases} \|y-x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\|+\|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(1) (V, d_f) ist ein metrischer Raum.
(2) Sei $d_n(x,y) = \|y-x\|$ die übliche Metrik. Die Identität $\mathrm{id}_V\colon (V,d_f) \to (V,d_n)$ ist stetig, nicht jedoch $\mathrm{id}_V\colon (V,d_n) \to (V,d_f)$.

1.115. Übung. Es seien (X,d), (Y,d') metrische Räume und $\alpha \in (0,1]$ gegeben. Eine Abbildung $F\colon (X,d) \to (Y,d')$ heißt *α-Höldersch,* falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle x, $y \in X$ gilt:

$$d'\big(F(x), F(y)\big) \le C\, d(x,y)^\alpha \ .$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede α-Höldersche Abbildung stetig ist.

1.116. Übung. Sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r\,\frac{a}{b}\ ,$$

mit r, a, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, so dass p, a und b paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die *p-adische Bewertung* von q durch $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die p-adische Metrik

$$d_p(x,y) = \|y-x\|_p$$

auf $\mathbb{Q}$ induziert.

(1) Zeigen Sie, dass d_p wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
(2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:
$$d_p(x,z) \le \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}\ ,$$
und „$<$“ kann nur auftreten, wenn $d_p(x,y) = d_p(y,z)$ gilt.
(3) Folgern Sie daraus: Für alle x, $y \in (\mathbb{Q}, d_p)$ und alle ε, $\delta > 0$ seien $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ metrische Bälle bezüglich d_p, dann sind $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.117. Übung. Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in X. Zeigen Sie: die Folge x_i konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von x in X ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \ge n_0$.

Übungen zu Abschnitt 1.b.

1.118. ÜBUNG. Sei X eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{\, U \subset X \bigm| X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge} \,\} \cup \{\emptyset\} \quad \subset \quad \mathcal{P}X \;.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie.*

1.119. ÜBUNG. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen,* wenn es eine Menge $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \bigl\{\, z \in \mathbb{C}^n \bigm| p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P \,\bigr\} \;. \tag{*}$$

Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen,* wenn $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}_Z$ aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie.*
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1) $\emptyset$ und $\mathbb{C}^n$ sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn $A_1, \dots, A_k$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A_1 \cup \dots \cup A_k$ (betrachten Sie hierzu geeigenete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \;.$$

Bemerkung: Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes A nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um A wie in (*) zu definieren.

1.120. ÜBUNG. Seien X und Y beliebige Mengen. Zeigen Sie:

(1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ die diskrete Topologie, und sei $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$ die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F \colon (X, \mathcal{O}_\delta) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G \colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_K)$ stetig.
(2) Seien $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ beliebige Topologien auf X und Y. Falls für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G \colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, dann ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie.

1.121. ÜBUNG. Es sei $F \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir nennen F *stetig am Punkt* $x \in X$ genau dann, wenn für jede Umgebung $V \subset Y$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.

(1) Zeigen Sie, dass F genau stetig ist, wenn F an jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
(2) Es seien d, d' Metriken auf X beziehungsweise Y, so dass $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{d'}$. Zeigen Sie, dass die obige Definition zu Definition 1.3 äquivalent ist.

Übungen zu Abschnitt 1.c.

1.122. ÜBUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien A, A_0 und A_1 abgeschlossene Teilmengen von X, und A_0 und A_1 seien disjunkt. Zeigen Sie:

(1) die Funktion $d_A \colon X \to \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ ist stetig;
(2) es gilt $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;
(3) die Funktion $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$ hat die in Satz 1.25 (3) geforderten Eigenschaften.

1.123. ÜBUNG. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei $\mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie auf X. Welche Trennungseigenschaften besitzt $(X, \mathcal{O}_K)$?

1.124. Übung. Es sei X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie $\mathcal{O}$ aus Aufgabe 1.118. Welche Trennungseigenschaften besitzt $(X, \mathcal{O})$?

1.125. Übung. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{N}$ heiße offen bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_<$, wenn aus $m \in U$ auch $n \in U$ für alle $n \geq m$ folgt.

(1) Überprüfen Sie, dass $\mathcal{O}_<$ die Axiome einer Topologie erfüllt.
(2) Welche Trennungseigenschaften hat $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$?

1.126. Übung. Zeigen Sie:

(1) die Zariski-Topologie $\mathcal{O}_Z$ auf $\mathbb{C}^n$ ist für kein $n \geq 1$ hausdorffsch, erfüllt aber $(T1)$.
(2) Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ definiert eine stetige Abbildung $p\colon (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \to (\mathbb{C}, O_Z)$.
(3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.27 (2) widerspricht.

Hinweis: Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome p gilt:

(1) wenn $p(x) \neq 0$, dann existiert ein kleiner metrischer Ball $B_\varepsilon(x)$, auf dem p nirgends verschwindet.
(2) wenn p auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz $\mathbb{C}^n$.

Übungen zu Abschnitt 1.d.

1.127. Übung. Betrachte den Raum $X = [0,1]^2$ mit

$$d\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.
(2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt $(X, \mathcal{O}_d)$?

1.128. Übung. Es sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf einer Menge Y. Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert genau dann gegen einen Punkt $y \in Y$, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ mit $y \in S$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_i \in S$ für alle $i \geq i_0$.
(2) Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ das Urbild $f^{-1}(S)$ in X offen ist.

Übungen zu Abschnitt 1.e.

1.129. Übung. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn jeder Filter auf X höchstens einen Grenzwert hat.

1.130. Übung. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der von ihr induzierte Filter gemäß Beispiel 1.43 (4). Zeigen Sie:

(1) Der Filter $\mathcal{F}$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die Folge $(x_n)_n$ gegen x konvergiert.
(2) Der Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn er ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$ ist.

1.131. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 1.47.

1.132. Übung. Betrachte

$$\mathcal{F} = \big\{\, U \subset \mathbb{R} \;\big|\; \text{es gibt } \delta > 0, \text{ so dass } (0, \delta) \subset U \,\big\} \subset \mathcal{P}\mathbb{R}\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein freier Filter auf $\mathbb{R}$ ist.
(2) Konvergiert $\mathcal{F}$ in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?
(3) Sei jetzt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Übersetzen Sie die Aussage „$f\mathcal{F}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$“ in die Sprache der Analysis I.

Übungen zu Abschnitt 1.f.

1.133. Übung. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}_{d_X}$, und sei $Y \subset X$ versehen mit der induzierten Metrik $d_Y = d|_{Y\times Y}$. Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{O}_{d_X}$ induzierte Unterraumtopologie $\mathcal{O}_Y$ mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_Y}$ übereinstimmt.

1.134. Übung. Manchmal möchte man Funktionen durch Fallunterscheidung definieren und sicherstellen, dass die so definierte Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Dazu seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und $A_1, \dots, A_k \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$. Es sei $f\colon X \to Y$ gegeben, so dass $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ für alle $i = 1, \dots, k$ stetig ist bezüglich der Unterraumtopologie auf A_i. Zeigen Sie, dass dann $f\colon X \to Y$ ebenfalls stetig ist.

1.135. Übung. Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik $d_{X\times Y}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch

$$d_{X\times Y}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\big\} .$$

Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{O}_{d_X}$ und $\mathcal{O}_{d_Y}$ induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_{X\times Y}}$ übereinstimmt.

1.136. Übung. Zeigen Sie: ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn die Diagonale

$$\Delta X = \big\{ , (x, x) \bigm| x \in X \big\}$$

als Teilmenge des Produktes $X \times X$ abgeschlossen ist.

1.137. Übung. Wir versehen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2 \qquad F(t) = \big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big) , \tag{a}$$

$$G\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2 \qquad G(t) = \big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big) . \tag{b}$$

$$H\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 , \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \tag{c}$$

1.138. Übung. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine überabzählbare Familie topologischer (T1)-Räume mit jeweils mehr als einem Punkt für alle $i \in I$. Zeigen Sie: dann besitzt $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

1.139. Übung. Es sei X eine Menge und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von *Halbmetriken,* das heißt, $d_n\colon X \times X \to [0, \infty]$ erfüllt die Axiome (2) und (3) aus Definition 1.1 sowie $d_n(x, x) = 0$ für alle $x \in X$. Außerdem existiere zu x, $y \in X$ mit $x \neq y$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d_n(x, y) > 0$. Dann definieren wir $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ durch

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}\, d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)} ,$$

wobei wir $\frac{2^{-n}\cdot\infty}{1+\infty} = 2^{-n}$ setzen. Zeigen Sie:

(1) Für jedes n erfüllt $(x, y) \mapsto \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}$ wieder die Dreiecksungleichung.
(2) Die Abbildung d ist eine Metrik auf X.
(3) Eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{B} = \big\{ B_{0,\varepsilon}(x) \cap \dots \cap B_{n,\varepsilon}(x) \bigm| x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0 \big\} ,$$

$$\text{wobei} \qquad B_{k,\varepsilon}(x) = \big\{ y \in X \bigm| d_k(x, y) < \varepsilon \big\} .$$

(4) Eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{S} = \left\{ B_{n,\varepsilon}(x) \;\middle|\; x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0 \right\} .$$

(5) Das topologische Produkt abzählbar vieler metrischer Räume ist metrisierbar.

1.140. Übung. Es sei I eine Menge und X ein topologischer Raum. Wir identifizieren $\operatorname{Abb}(I,X)$ mit $\prod_{i\in I} X$ so, dass

$$\operatorname{Abb}(I,X) \ni (f\colon I \to X) \longmapsto (f(i))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X .$$

Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{Abb}(I,X)$ konvergiert genau dann bezüglich der Produkttopologie gegen eine Abbildung $f\colon I \to X$, wenn sie punktweise konvergiert, das heißt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i) \qquad \text{für alle } i \in I .$$

(2) Sei X jetzt ein (T1)-Raum. Die obige Folge konvergiert genau dann bezüglich der Box-Topologie, wenn sie punktweise konvergiert und zusätzlich eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$f_n(i) = f(i) \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } i \in I \setminus I_0 .$$

Falls X ein metrischer Raum ist, ist die Box-Topologie für unendliche I sogar wesentlich feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Übungen zu Abschnitt 1.g.

1.141. Übung. Seien $(X,\mathcal{O})$, $(Y,\mathcal{O})$ Hausdorff-Räume, X sei kompakt, und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $F(X) \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.142. Übung. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.
Hinweis: Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.143. Übung. Zeigen Sie, dass offene Teilmengen kompakter Räume lokalkompakt sind.

1.144. Übung. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$.

(1) Zeigen Sie beispielsweise mit Hilfe der stereographischen Projektion, dass S^n homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ist.
(2) Finden Sie eine Kompaktifizierung $\iota\mathbb{R}^n \hookrightarrow K$ des $\mathbb{R}^n$, so dass $K \setminus \operatorname{im}\iota$ mehr als einen Punkt enthält.

1.145. Übung. Es sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X. Zeigen Sie, dass sich $x_\bullet\colon \mathbb{N} \to X$ genau dann stetig auf $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $\infty \mapsto x_\infty$ fortsetzen lässt, wenn die Folge (x_i) gegen x_∞ konvergiert.

Übungen zu Abschnitt 1.h.

1.146. Übung. Es seien X, Y quasikompakt, und $\mathcal{U}$ sei eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Zeigen Sie:

(1) Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung U_x von x, so dass $U_x \times Y$ von endlich vielen Elementen aus $\mathcal{U}$ überdeckt wird.
(2) Es existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

1.147. Übung. Es bezeichne ℓ^∞ den Raum der beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(1) Die Einschränkungsabbildung $r\colon C(\beta\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \ell^\infty$ ist bijektiv.
(2) Wir versehen ℓ^∞ und $C(\beta\mathbb{N},\mathbb{R})$ jeweils mit der Supremumsmetrik. Dann ist r eine Isometrie.

1.148. Übung. Wir betrachten den Raum $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, versehen mit der Topologie zur Basis

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \bigl\{\, B_r(p) \bigm| p \in B_1(0) \text{ und } 0 < r \le 1 - \|p\| \,\bigr\}&\\ \cup \bigl\{\, B_r\bigl((1-r)p\bigr) \cup \{p\} \bigm| p \in S^1 \subset X \text{ und } 0 < r < 1 \,\bigr\}&\;.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Für alle $p \in S^1 \subset X$ ist die Funktion $f_p\colon X \to [-1,1]$ mit

$$f_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = p \text{ und} \\ \dfrac{\langle q, q-p\rangle}{\langle p, q-p\rangle} & \text{für } q \neq p \end{cases}$$

stetig auf X und erfüllt $\bigl\langle q-p, q-f_p(q)\,p\bigr\rangle = 0$. Sie nimmt für alle $r \in (0,1]$ auf dem Kreis mit Radius r um $(1-r)p$ den Wert $1-2r$ an, außer im Punkt p.
(2) Der Raum X ist vollständig regulär.
(3) Der Raum X hat eine abzählbare dichte Teilmenge $Q = B_1(0) \cap \mathbb{Q}^2$ und erfüllt (A1), aber nicht (A2).
(4) Der Raum X ist nicht normal.
(5) Lässt sich X in einen normalen Raum einbetten?

Hinweis: Benutzen Sie in (1) den Satz des Thales. Zeigen Sie zu (4), dass jede reellwertige Funktion auf dem abgschlossenen Unterraum $S^1 \subset X$ stetig ist, sich aber nicht alle diese Funktionen stetig auf X fortsetzen lassen. Sie dürfen verwenden, dass $\mathrm{Abb}(S^1,\mathbb{R})$ eine größere Kardinalität hat als $\mathrm{Abb}(Q,\mathbb{R})$.

Übungen zu Abschnitt 1.i.

1.149. Übung. Betrachten Sie den Raum $X = [0,1]^2$ mit der Topologie aus Übung 1.127.

(1) Geben Sie einen Homöomorphismus $X \to \coprod_{i\in[0,1]}[0,1]$ an.
(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.150. Übung. Sei $\Bbbk$ ein beliebiger Körper. Es seien V_i Vektorräume über $\Bbbk$ für $i \in I$. Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\in I} V_i &:= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I,\ \text{fast alle } x_i = 0\}\\ \subset \prod_{i\in I} V_i &:= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\}\;.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Die direkte Summe ist ein Koprodukt in $\mathcal{V}ec_\Bbbk$.
(2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in $\mathcal{V}ec_\Bbbk$.
(3) Für die Dualräume gilt

$$\Bigl(\bigoplus_{i\in I} V_i\Bigr)^* = \prod_{i\in I} V_i^*.$$

1.151. Übung. Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ und $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\ f\ } (Y,\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\ g\ } (Z,\mathcal{O}_Z)\;.$$

(1) Falls $\mathcal{O}_Y$ die von g und $\mathcal{O}_Z$ induzierte Topologie ist, und $\mathcal{O}_X$ die von f und $\mathcal{O}_Y$ induzierte Topologie ist, dann ist $\mathcal{O}_X$ auch gleich der von $g \circ f$ und $\mathcal{O}_Z$ induzierten Topologie.
(2) Falls $\mathcal{O}_Y$ die von f und $\mathcal{O}_X$ koinduzierte Topologie ist, und $\mathcal{O}_Z$ die von g und $\mathcal{O}_Y$ koinduzierte Topologie ist, dann ist $\mathcal{O}_Z$ auch gleich der von $g \circ f$ und $\mathcal{O}_X$ koinduzierten Topologie.

1.152. Übung. Führen Sie den Beweis von Satz 1.83 (2) aus.

1.153. Übung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$, und sei $f \colon V \to X$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf V. Zeigen Sie:
(1) die Topologie $\mathcal{O}_X$ ist genau die von der Verklebungstopologie auf $X \subset X \cup_f Y$ induzierte Unterraumtopologie;
(2) wenn V abgeschlossen ist und X und Y beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für $X \cup_f Y$.

1.154. Übung. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der komplexe Einheitskreis, und sei $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten auf S^1 die von $x \sim zx$ erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt, $x \sim y$ genau dann, wenn $x/y = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf $S^1/\sim$, unterscheiden Sie die Fälle $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$ und $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

1.155. Übung. Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y_1, y_2) = \left(rx_1, \frac{x_2}{r}\right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

(1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im $\mathbb{R}^2$.
(2) Skizzieren Sie $X = \mathbb{R}^2/\sim$.
(3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf X, zum Beispiel durch Angabe einer Basis.

1.156. Übung. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.155 definierte Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei wie vorhin $X = \mathbb{R}^2/{\sim}$, sei $Y = \bigl(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\bigr)/{\sim}$ und $Z = \bigl(\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})\bigr)/{\sim}$.
(1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt X?
(2) Zeigen Sie, dass Y zum Raum aus Beispiel 1.28 homöomorph ist.
(3) Zu welchem bekannten Raum ist Z homöomorph?

1.157. Übung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein normaler topologischer Raum, sei $f \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung, und sei $\mathcal{O}_Y$ die Quotiententopologie auf Y. Zeigen Sie:
(1) wenn Urbilder $f^{-1}(\{y\})$ von Punkten in Y abgeschlossen sind in X, gilt (T1) für $(Y, \mathcal{O}_Y)$;
(2) wenn f *abgeschlossen* ist, das heißt, wenn $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $A \subset X$, dann gilt (T4) für $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

Übungen zu Abschnitt 1.j.

1.158. Übung. Zeigen Sie: ein topologischer Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nicht zur disjunkten Vereinigung zweier nicht leerer topologischer Räume homöomorph ist.

1.159. Übung. Sei

$$X = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \;\middle|\; x \neq 0 \right\} \cup \bigl(\{0\} \times [-1,1]\bigr) \quad \subset \quad \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ induzierten Unterraumtopologie.
(1) Skizzieren Sie X.
(2) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

(3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von X.

1.160. Übung. Zeigen Sie:

(1) Der Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der p-adischen Topologien für alle Primzahlen p.
(2) Der Raum $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z)$ ist zusammenhängend.

1.161. Übung. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie topologischer Räume und $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes $(x_i)_{i\in I} \in X$ das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte $x_i \in X_i$ ist. Falls alle X_i nicht leer sind, ist insbesondere X genau dann wegzusammenhängend, wenn alle X_i wegzusammenhängend sind.

Übungen zu Abschnitt 1.k.

1.162. Übung. Beweisen Sie Proposition 1.98.

1.163. Übung. Es sei X ein Hausdorff-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Dann konvergiert eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C(X, Y)$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn (f_i) gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

1.164. Übung. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Wir nehmen an, dass es Kompakta $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X gibt, so dass

$$K_i \subset \mathring{K}_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \; .$$

Zeigen Sie:

(1) Durch
$$d_i(f, g) = \sup_{x\in K_i} d_Y(f(x), g(x))$$
wird eine Folge von Halbmetriken auf $C(X, Y)$ definiert, so dass für alle $f \neq g\colon X \to Y$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(f, g) \neq 0$ existiert.
(2) Die Konstruktion aus Übung 1.139 liefert eine Metrik d auf $C(X, Y)$, die die kompakt-offene Topologie induziert.

1.165. Übung. Formulieren und beweisen Sie ein topologisches Analogon des „anderen Exponentialgesetzes“ $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$.

1.166. Übung. Es sei X ein topologischer Raum, $f\colon X \to Y$ sei surjektiv, und Y trage die Quotiententopologie. Es sei außerdem Z ein lokalkompakter topologischer Raum. Wir bezeichnen die Produkttopologie mit $\mathcal{O}_\sqcap$ und die Quotiententopologie auf $Y\times Z$ zur Abbildung $f\times\mathrm{id}_Z\colon X\times Z \to Y \times Z$ mit $\mathcal{O}_{\text{fin}}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\mathrm{id}_{Y\times Z}\colon (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}}) \to (Y \times Z, \mathcal{O}_\sqcap) \; , \tag{1}$$
$$\mathrm{id}_{Y\times Z}\colon (Y \times Z, \mathcal{O}_\sqcap) \to (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}}) \; . \tag{2}$$

Hinweis zu (2): betrachten Sie das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "f"'] & C(Z, (X \times Z, \mathcal{O}_\sqcap)) \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & C(Z, (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}})) \end{tikzcd}$$

und benutzen Sie das Exponentialgesetz 1.101 (2).

Übungen zu Abschnitt 1.l.

1.167. Übung. Sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ein (Schief-)Körper, und sei $k = 1$, 2 oder $4 = \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$, dann sei

$$\bigl(\Bbbk P^n, \mathcal{O}_{\Bbbk P^n}\bigr) = \bigl(\Bbbk^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\bigr) \,/ \sim ,$$

wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ genau dann, wenn es ein $z \in \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$ gibt, so dass $y_i = zx_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$ wird auch als $[x_0 : \dots : x_n]$ geschrieben. Zeigen Sie, dass $\Bbbk P^n$, versehen mit der Quotiententopologie, eine kn-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass $\Bbbk P^n$ die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von $U_i = \{\, [x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0 \,\} \subset \Bbbk P^n$ nach $\Bbbk^n \cong \mathbb{R}^{nk}$.

1.168. Übung. Es sei $\Bbbk P^n$ wie oben definiert und $k = \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$. Die Abbildung

$$H^n_{\Bbbk} \colon S^{k(n+1)-1} \longrightarrow \Bbbk^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q_n} \Bbbk P^n$$

heißt *Hopffaserung.* Die Abbildung q_n ist die Quotientenabbildung, und wir schreiben

$$q_n(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n] \,.$$

Zeigen Sie:

(1) Für einen quasikompakten Raum X und einen Hausdorffraum Y ist jede stetige Bijektion $F \colon X \to Y$ ein Homöomorphismus.

(2) Die Abbildungen

$$\Bbbk P^n \ni [z_0 : \dots : z_n] \longmapsto [z_0 : \dots : z_n : 0] \in \Bbbk P^{n+1}$$

$$\text{und} \qquad D^{k(n+1)} \ni (z_0, \dots, z_n) \longmapsto \Bigl[z_0 : \dots : z_n : \sqrt{1 - |z|^2}\Bigr] \in \Bbbk P^{n+1}$$

mit $D^{k(n+1)} = \bigl\{\, z \in \Bbbk^{n+1} \bigm| |z| \leq 1 \,\bigr\}$ sind stetig.

(3) Der Raum $\Bbbk P^n \cup_{H^n_{\Bbbk}} D^{k(n+1)}$ ist homöomorph zu $\Bbbk P^{n+1}$.

(4) Der projektive Raum $\Bbbk P^n$ lässt sich als CW-Komplex schreiben.

1.169. Übung. Wir definieren

$$\Bbbk P^\infty = \operatorname{colim} \Bbbk P^n \,.$$

Sei $\Bbbk^\infty$ der Vektorraum der endlichen $\Bbbk$-wertigen Folgen, und sei

$$Q = \bigl(\Bbbk^\infty \setminus \{0\}\bigr) \,/ \sim \qquad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

(1) die natürliche Abbildung $F \colon \Bbbk P^\infty \to Q$ ist bijektiv;

(2) sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\Bbbk^\infty$ und sei $\mathcal{O}_Q$ die dazugehörige Quotiententopologie auf Q, dann ist F stetig;

(3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung F^{-1} ist für keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\Bbbk^\infty$ stetig.

KAPITEL 2

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume X auf zweierlei Art definieren:

(1) Als Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ der Homotopieklassen von Wegen $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$, oder
(2) Als Gruppe Γ, die auf einem einfach zusammenhängenden Raum $\widetilde{X}$ wirkt, mit $X \cong \widetilde{X}/\Gamma$.

2.1. Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $p = 1$.

(1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$, dann erhalten wir die Umlaufzahl
$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\, dt \quad \in \quad \mathbb{Z}\,.$$
In der Tat werden wir zeigen, dass je zwei Wege in $\mathbb{C}^*$ mit Anfangs- und Endpunkt $p = 1$ und der gleichen Umlaufzahl um 0 in $\mathbb{C}^*$ (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$.
(2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto e^{2\pi i\, z}$, dann gilt
$$e^{2\pi i\, z_0} = e^{2\pi i\, z_1} \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}\,.$$
Wir können also $\mathbb{C}^*$ als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes $\mathbb{C}$ nach der Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$ schreiben; dabei wirkt $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}$ durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort (sofern nicht anders angegeben) unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Wir dürfen uns Homotopien als Wege im Raum der Abbildungen vorstellen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich gröberen Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. Definition. Seien X, Y topologische Räume. Zwei Abbildungen $f_0, f_1\colon X \to Y$ heißen *homotop*, kurz $f_0 \sim f_1$, wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung $H\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $H(x,t) = f_t(x)$ für $t \in \{0,1\}$ gibt. Dann heißt H eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1, und wir schreiben $H_t = H(\,\cdot\,, t)\colon X \cong X \times \{t\} \to Y$ für alle $t \in [0,1]$. Die Menge aller zu f homotopen Abbildungen heißt die (*freie*) *Homotopieklasse* von f und wird mit $[f]$ bezeichnet.

2.3. Bemerkung.

(1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von einem Raum in einen anderen (Übung 2.72), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.
(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$\big(f_0 \sim f_1 \colon Y \to Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1 \colon X \to Y\big) \qquad \Longrightarrow \qquad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1) \colon X \to Z \;.$$

2.4. Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g \colon Y \to X$ gibt, so dass

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \colon X \to X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y \colon Y \to Y \;.$$

In diesem Fall heißen X und Y *homotopieäquivalent,* und g heißt ein *Homotopieinverses* zu f.

Ein Raum X heißt *zusammenziehbar,* wenn er zu einem einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist.

Die Räume $B^n \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$ sind zusammenziehbar. Allgemeiner sind auch sternförmige Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zusammenziehbar. Es gibt aber noch weitere Beispiele, siehe Beispiel 2.11.

2.5. Bemerkung.

(1) Jeder Homöomorphismus f ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit $g = f^{-1}$.
(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume (Übung 2.73).
(3) Betrachte die (naive) *Homotopie-Kategorie* $\mathcal{HT}op$ mit den gleichen Objekten wie die Kategorie $\mathcal{T}op$ aus Beispiel 1.20 (4) und den Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op}(X,Y) = C(X,Y)/\sim \;.$$

Die Identität auf X im Sinne von Definition 1.19 (3) ist die Homotopieklasse $[\mathrm{id}_X]$ der Abbildung id_X. Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus $f \colon X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g \colon Y \to X$ (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y \;.$$

Wenn ein Inverses existiert, ist es eindeutig (Übung?). Beispiele sind Bijektionen in $\mathcal{S}et$, Gruppenisomorphismen in $\mathcal{G}rp$, lineare Isomorphismen in $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$, und natürlich Homöomorphismen in $\mathcal{T}op$. Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in $\mathcal{HT}op$.

Algebraische Topologie versucht unter anderem, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopie-Äquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg $\gamma \colon [0,1] \to X$ immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.6. Definition. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum X und einer beliebigen Teilmenge $A \subset X$. Eine *Abbildung* $f \colon (X,A) \to (Y,B)$ *von Paaren* ist eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ mit $f(A) \subset B$. Ein *punktierter* (*topologischer*) *Raum* (X,x_0) ist ein Paar $(X,\{x_0\})$ mit $x_0 \in X$. Der Punkt x_0 heißt auch *Basispunkt.* Eine *punktierte Abbildung* $f \colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also $f(x_0) = y_0$.

2.7. Definition. Es seien (X,A) ein Paar und Y ein Raum. Zwei Abbildungen f, $g \colon X \to Y$ heißen *homotop relativ zu* A, wenn es eine Homotopie $H \colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen f und g gibt mit

$$H(a,t) = f(a) = g(a) \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0,1] \;.$$

Der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ ist in $\mathbb{C}^*$ frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t,s) = e^{2\pi i(1-s)t} \; .$$

Wir werden aber bald sehen, dass γ nicht relativ zu $\{0,1\}$ (also relativ zu den Endpunkten) homotop zum konstanten Weg ist.

2.8. Bemerkung. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.97.

(1) Wie in Satz 1.101 gehört zu jeder Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen f, $g\colon X \to Y$ ein stetiger Weg $h\colon [0,1] \to (C(X,Y), \mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$ von f nach g mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x,s)$$

für alle $x \in X$, $s \in [0,1]$. Wenn X lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in $C(X,Y)$ also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y.

(2) Sei jetzt $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|A}(X,Y) = \{\, g \in C(X,Y) \mid g|_A = f|_A \,\} \subset C(X,Y) \; ,$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu A einen Weg in $C_{f|A}(X,Y)$ wie oben. Wenn X lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in $C_{f|A}(X,Y)$ eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man $C_{f|A}(X,Y)$ mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.9. Definition. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt von X*, wenn es eine stetige Abbildung $f\colon X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{id}_A$ gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich $\iota \circ f\colon X \to X$ homotop zur Identität id_X ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen $\iota \circ f$ und id_X sogar relativ zu A gewählt werden kann.

2.10. Beispiel. (1) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subset X$ ist Retrakt von X, aber nur dann Deformationsretrakt, wenn X zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$ kein Deformationsretrakt (Beweis später).

(2) Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{C}^*$ mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \qquad \text{und} \qquad H(z,s) = \frac{z}{|z|^s} \; .$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz $\mathbb{C}$ (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.11. Beispiel. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 2.1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 2.1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

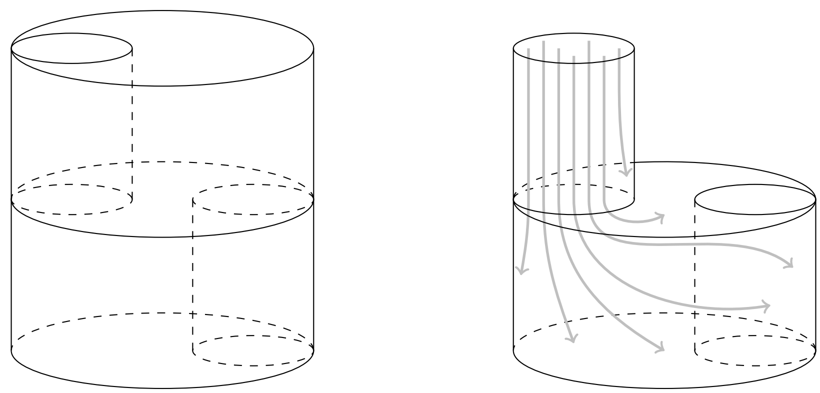


ABBILDUNG 2.1. Bings Haus mit zwei Räumen

2.b. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.12. DEFINITION. Es sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in (X, x) ist ein Weg von x nach x, also eine Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X, x), dann ist ihre *Verkettung* die Schleife $\gamma_1\gamma_2\colon [0,1] \to X$ mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\text{ , und} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\text{ .} \end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$ ist die Menge aller Schleifen in (X, x) modulo Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$.

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.134 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, dass

$$\begin{aligned} H(0, s) = H(1, s) &= x && \text{für alle } s \in [0,1]\text{ , und} \\ H(t, s) &= \gamma_s(t) && \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und alle } s \in \{0,1\}\text{ .} \end{aligned}$$

2.13. SATZ. *$\pi_1(X, x)$ bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ werden repräsentiert durch e beziehungsweise $\bar{\gamma}\colon [0,1] \to X$, mit*

$$e(t) = x \qquad \textit{und} \qquad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \qquad \textit{für alle } t \in [0,1]\text{ .}$$

BEWEIS. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien H_1 und $H_2\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ relative Homotopien zwischen den Schleifen α_0 und α_1 beziehungsweise zwischen β_0 und β_1. Wir verketten die Homotopien und erhalten

$$H = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\text{ , und} \\ H_2(2t-1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\text{ .} \end{cases}$$

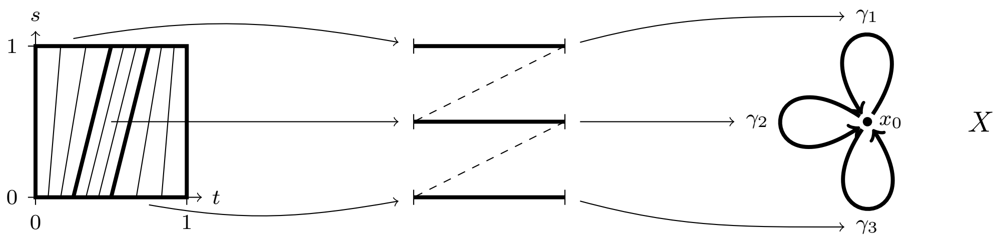
Dann ist H eine Homotopie zwischen $\alpha_0\beta_0$ und $\alpha_1\beta_1$ relativ zu $\{0,1\}$, also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf $\pi_1(X,x)$ wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$\big((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3\big)(t)=\begin{cases}\gamma_1(4t) & 0\le t\le 1/4\;,\\ \gamma_2(4t-1) & 1/4\le t\le 1/2\;,\\ \gamma_3(2t-1) & 1/2\le t\le 1\;;\end{cases}$$

$$\big(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)\big)(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & 0\le t\le 1/2\;,\\ \gamma_2(4t-2) & 1/2\le t\le 3/4\;,\\ \gamma_3(4t-3) & 3/4\le t\le 1\;.\end{cases}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ und $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ wie im folgenden Bild,



also in Formeln als

$$H(s,t)=\begin{cases}\gamma_1\big(4t/(1+s)\big) & 0\le t\le (1+s)/4\;,\\ \gamma_2\big(4t-(1+s)\big) & (1+s)/4\le t\le (2+s)/4\;,\\ \gamma_3\big(1-4(1-t)/(2-s)\big) & (2+s)/4\le t\le 1\;.\end{cases}$$

Um zu zeigen, dass $[e]$ ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen $e\gamma$ und γ für eine beliebige Schleife γ. Schließlich überprüfen wir, dass $[\overline{\gamma}]$ nur von $[\gamma]$ abhängt und zu $[\gamma]$ linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t,s)=\begin{cases}\gamma(1-2st) & \text{falls } 0\le t\le \frac12\;\text{, und}\\ \gamma(1-2s(1-t)) & \text{falls } \frac12\le t\le 1\;.\end{cases}$$

zwischen e und $\overline{\gamma}\gamma$. Damit haben wir die Gruppenaxiome für $\pi_1(X,x)$ nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass $[e]$ das eindeutige, beidseitige neutrale Element und $[\overline{\gamma}]$ das eindeutige, beidseitige Inverse zu $[\gamma]$ ist. ☐

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal γ statt $[\gamma]$ schreiben.

2.14. Satz. *Sei X ein Raum, x, $y\in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von x nach y induziert einen Isomorphismus von $\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,y)$. Insbesondere hängt der Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X,x)$ nicht vom Basispunkt x ab, wenn X wegzusammenhängend ist.*

Beweis von Satz 2.14. Sei $\alpha\colon[0,1]\to X$ ein Weg von x nach y, dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X,x)\ni\gamma\longmapsto\bar\alpha\gamma\alpha\in\pi_1(X,y)\;.$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass $[\overline{\alpha}\gamma\alpha]$ weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von α und γ abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\overline{\alpha}\gamma_1\alpha)(\overline{\alpha}\gamma_2\alpha)\sim(\overline{\alpha}\gamma_1)(\alpha\overline{\alpha})(\gamma_2\alpha)\sim(\overline{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha)\sim(\overline{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha)\sim\overline{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha\;.$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von $\overline{\alpha}$ induziert, denn $\bar{\overline{\alpha}}=\alpha$ und

$$\alpha(\overline{\alpha}\gamma\alpha)\overline{\alpha}\sim(\alpha\overline{\alpha})\gamma(\alpha\overline{\alpha})\sim e\gamma e\sim\gamma\;.$$ ☐

Man schreibt daher manchmal $\pi_1(X)$, wenn X wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X,x)$ ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.15. Bemerkung. Für $x = y$ gehört also zu jedem $\alpha \in \pi_1(X,x)$ ein innerer Automorphismus von $\pi_1(X,x)$, nämlich

$$\gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \;.$$

Wenn $\pi_1(X,x)$ nicht kommutativ ist, ist das nicht die Identität auf $\pi_1(X,x)$. In diesem Fall kann man nicht von den Elementen von $\pi_1(X)$ sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen" zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.16. Definition. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ordnet jedem Objekt $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ ein Objekt $\mathcal{F}A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ und jedem Morphismus $F \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ einen Morphismus $\mathcal{F}F \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ zu, so dass

$$\mathcal{F}\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\mathcal{F}A} \;, \tag{1}$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \tag{2}$$

für alle $A, B, C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ und alle $F \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C)$, $G \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

2.17. Definition. Wir betrachten die Kategorien $\mathcal{T}op_+$ (und $\mathcal{HT}op_+$) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Obj}(\mathcal{T}op_+) = \operatorname{Obj}(\mathcal{HT}op_+) &= \bigl\{\, (X,x) \bigm| X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{T}op) \text{ und } x \in X \,\bigr\} \;, \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op_+}\bigl((X,x),(Y,y)\bigr) &= \bigl\{\, F\colon X \to Y \bigm| F \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(X,Y) \text{ und } F(x) = y \,\bigr\} \\ \text{und} \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}\bigl((X,x),(Y,y)\bigr) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op_+}\bigl((X,x),(Y,y)\bigr) \bigm/ \sim \;, \end{aligned}$$

wobei $\sim$ hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf (X,x) ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung $\mathrm{id}_{(X,x)}$, und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

Später werden wir die Klasse der Objekte in $\mathcal{HT}op_+$ etwas einschränken, siehe Beispiel **??** (**??**).

2.18. Beispiel. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}op_+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{HT}op_+ \arrow[d] \\ \mathcal{T}op \arrow[r] & \mathcal{HT}op \end{tikzcd}$$

Die Konstruktion B im Beweis der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist ebenfalls ein Funktor. Das ergibt sich aus dem zweiten Teil von Lemma 1.75.

2.19. Satz. *Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor*

$$\pi_1\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{G}rp$$

von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird (X,x) auf $\pi_1(X,x)$ und $F\colon (X,x) \to (Y,y)$ auf $F_* = \pi_1 F\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ abgebildet mit

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y,y) \qquad \text{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X,x) \;.$$

Dieser Funktor ist auch auf $\mathcal{HT}op_+$ wohldefiniert.

Beweis. Sei $F\colon (X,x) \to (Y,y)$ eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass $\pi_1 F = F_*$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei H eine relative Homotopie zwischen γ_0, $\gamma_1\colon ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x)$, dann ist die Abbildung $F\circ H\colon [0,1]\times[0,1]\to Y$ eine relative Homotopie zwischen $F\circ\gamma_0$ und $F\circ\gamma_1$, also ist F_* wohldefiniert.

Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X,x). Dann folgt

$$(F\circ\gamma_1)(F\circ\gamma_2) = F\circ(\gamma_1\gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.12, also ist F_* ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass π_1 die beiden Eigenschaften aus Definition 2.16 erfüllt. Da $\mathrm{id}_X\circ\gamma = \gamma$, gilt offensichtlich (1), also

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)}\ .$$

Seien $F\colon (Y,y)\to(Z,z)$ und $G\colon (X,x)\to(Y,y)$ punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F\circ G)_*[\gamma] = [(F\circ G)\circ\gamma] = [F\circ(G\circ\gamma)] = F_*(G_*[\gamma])\ .$$

Um zu zeigen, dass π_1 auch auf $\mathcal{HT}op_+$ wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass F_* nur von der relativen Homotopieklasse von F abhängt. Sei also $H\colon X\times[0,1]\to Y$ eine relative Homotopie zwischen F_0 und $F_1\colon (X,x)\to(Y,y)$, dann ist die Abbildung $[0,1]\times[0,1]\to Y$ mit

$$(t,s)\longmapsto H(\gamma(t),s)$$

eine relative Homotopie zwischen $F_{0*}\gamma$ und $F_{1*}\gamma$. □

Wir können den Funktor $\pi_1\colon \mathcal{T}op_+\to\mathcal{G}rp$ also in zwei Funktoren

$$\mathcal{T}op_+ \longrightarrow \mathcal{HT}op_+ \xrightarrow{\ \pi_1\ } \mathcal{G}rp\ ,$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.18.

Wegen Bemerkung 2.15 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor $\mathcal{T}op\to\mathcal{G}rp$. Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab (Übung), weitere Folgerungen aus den Funktor-Axiomen lernen wir später kennen.

2.20. Folgerung. *Seien (X,x), (Y,y) homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist $\pi_1(X,x)$ isomorph zu $\pi_1(Y,y)$.* □

2.21. Definition. Ein nicht leerer topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend,* wenn er wegzusammenhängend ist mit $\pi_1(X)=\{e\}$.

Hierbei haben wir ausgesnutzt, dass der Isomorphietyp von $\pi_1(X,x)$ nach Satz 2.14 nicht vom Basispunkt $x\in X$ abhängt. In Übung 2.75 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

2.22. Beispiel.
(1) Der einpunktige Raum $\{*\}$ ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife $t\mapsto *$ gibt.
(2) Sei X zusammenziehbar, dann ist X nach Definition 2.4 zu $\{*\}$ homotopieäquivalent, also folgt $\pi_1(X)=\{e\}$. Man kann zeigen, dass zusammenziehbare Räume immer wegzusammenhängend sind, also ist X auch einfach zusammenhängend.

2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ (mit der Unterraumtopologie) auf. Um $\pi_1(S^1, 1)$ zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

2.23. Definition. Eine Abbildung $p\colon \widetilde{X} \to X$ heißt *Überlagerung,* wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x, eine Menge M mit diskreter Topologie und einen Homömorphismus $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times M$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \times M \arrow[drr, "\pi_U"'] & p^{-1}(U) \arrow[l, "\varphi", "\cong"'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ & U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir nennen dann U *gleichmäßig überlagert.* Eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ heißt *universell,* wenn $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

2.24. Beispiel. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung $p = e^{2\pi i\,\cdot}\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$. Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt $z = e^{2\pi i s} \in S^1$ hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $S^1 \setminus \{-z\}$, denn es gibt einen Homöomorphismus

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(s+n-\frac{1}{2}, s+n+\frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\cong} (S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{Z}\,.$$

Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ nach Definition 2.23 eine universelle Überlagerung.

2.25. Satz (Homotopie-Liftungssatz). *Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, und seien $\widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}$ und $H\colon Y \times [0,1] \to X$ stetig mit*

$$H(\,\cdot\,,0) = p \circ \widetilde{F}\colon Y \to X\ ,$$

dann existiert genau eine stetige Abbildung $\widetilde{H}\colon Y \times [0,1] \to \widetilde{X}$ mit

$$p \circ \widetilde{H} = H \qquad \textit{und} \qquad \widetilde{H}(\,\cdot\,,0) = \widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}\ .$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, hook, "\times\{0\}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Wir nennen $\tilde{H}$ den Lift der Homotopie H mit Startwert $\tilde{F}$.

Beweis. Bei konstruktiven Beweisen ist es manchmal am einfachsten, zuerst die Eindeutigkeit zu beweisen. Danach zeigt man lokale Existenz. Aus der Eindeutigkeit folgt dann, dass sich die lokal konstruierten Objekte zu einem globalen Objekt zusammensetzen lassen.

Seien also zwei Lifts $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\colon Y \times [0,1] \to \tilde{X}$ mit Startwert $\tilde{F}$ gegeben. Sei $y \in Y$. Wir behaupten, dass die Menge

$$A = \left\{\, t \in [0,1] \;\middle|\; \tilde{H}_1(y,t) = \tilde{H}_2(y,t) \,\right\} \subset [0,1]$$

offen und abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung gilt $0 \in A$, folglich $A = [0,1]$, da $[0,1]$ zusammenhängend ist.

Dazu sei $U \subset X$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $H(y,t)$ mit $p^{-1}(U) \cong U \times M$ wie oben. Wegen Stetigkeit der Abbildung $H(y,\,\cdot\,)$ existiert ein offenes Intervall $J \subset [0,1]$ mit $t \in J$, so dass $\{y\} \times J \subset H^{-1}(U)$. Die zusammengesetzten Abbildungen

$$J \xrightarrow{\tilde{H}_i(y,\,\cdot\,)} p^{-1}(U) \cong U \times M \xrightarrow{\pi_M} M$$

sind stetig, also konstant auf J, da M diskret ist. Aus $t \in A$ folgt daher $J \subset A$, und aus $t \notin A$ folgt $J \not\subset A$, somit ist A offen und abgeschlossen, und die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ ist bewiesen.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere $y \in Y$. Zu jedem $s \in [0,1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U_s von $H(y,s) \in X$, ein offenes Teilintervall $I_s \subset [0,1]$ mit $s \in I_s$ und eine offene Umgebung $V_s \subset Y$ von y mit $H(V_s \times I_s) \subset U_s$. Endlich viele solche Intervalle I_s überdecken $[0,1]$, da $[0,1]$ kompakt ist. Also existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte U_i und Umgebungen V_i von y mit

$$V_i \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U_i)\ .$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen W_i von y und Lifts $\widetilde{H}_i$ von $H|_{W_i \times [0,t_i]}$. Setze dazu zunächst $W_0 = Y$ und $\widetilde{H}_0(\,\cdot\,,0) = \widetilde{F}$. Sei jetzt eine offene Umgebung W_{i-1} von y und ein Lift $\widetilde{H}_{i-1}$ von $H|_{W_{i-1} \times [0,t_{i-1}]}$ bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i \colon W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\tilde{H}_{i-1}(\,\cdot\,,t_{i-1})} p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi} U_i \times M_i \xrightarrow{\pi_M} M$$

und setze $m_i = f_i(y) \in M_i$. Da M_i die diskrete Topologie trägt, ist $\{m_i\} \subset M_i$ offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von y. Für $w \in W_i$ setze

$$\tilde{H}_i(w,s) = \begin{cases} \widetilde{H}_{i-1}(w,s) & \text{für } 0 \le s \le t_{i-1}, \text{ und} \\ \varphi^{-1}\big(H(w,s), m_i\big) & \text{für } t_{i-1} \le s \le t_i\ . \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{H}_i$ auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze $W_y = W_k$ und erhalte einen lokalen Lift

$$\widetilde{H}_y \colon W_y \times [0,1] \to \widetilde{X} \qquad \text{von} \qquad H|_{W_y \times [0,1]}\ .$$

Wir erhalten eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von Y und Lifts $H_V \colon V \times [0,1] \to \tilde{X}$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Wegen der obigen Eindeutigsaussage stimmen je zwei dieser Lifts auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein, so dass sich alle zu einem globalen Lift $\tilde{H} \colon Y \times [0,1] \to \tilde{X}$ zusammensetzen. □

2.26. Satz. *Es gibt eine Isomorphismus* $\Phi \colon \pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$, *der* $[\exp(2\pi i\,\cdot\,)]$ *auf* $1 \in \mathbb{Z}$ *abbildet.*

Beweis. Wir betrachten die Überlagerung $p = e^{2\pi i\,\cdot} \colon \mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel 2.24. Wir fassen $\gamma \in \pi_1(S^1,1)$ als Homotopie H von Abbildungen von $Y = \{*\}$ nach S^1 mit $H(*,s) = \gamma(s)$ auf. Es sei $\widetilde{F}(*) = 0 \in \mathbb{Z}$ ein Lift von $H(*,0) = 1$, dann existiert nach Satz 2.25 ein eindeutiger Lift $\tilde{\gamma}(s) = \widetilde{H}(*,s)$, und es folgt $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Seien γ_0 und γ_1 relativ homotope Schleifen in $(S^1,1)$ mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Wir fassen eine relative Homotopie H zwischen γ_0 und γ_1 als Homotopie $K(s,t) = H(t,s)$ von der konstanten Abbildung $s \mapsto 1$ zu sich selbst auf. Dann lässt sich K nach Satz 2.25 zu einer Homotopie $\widetilde{K}$ liften, wobei $\widetilde{K}(s,t) = \tilde{\gamma}_s(t)$ für $s \in \{0,1\}$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts $\tilde{\gamma}_i$. Wir erhalten also eine Homotopie $\widetilde{H}(t,s) = \widetilde{K}(s,t)$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$. Da $s \mapsto \widetilde{H}(1,s)$ die konstante Abbildung $H(1,s) = 1 \in S^1$ liftet, ist diese Abbildung selbst konstant, und es folgt $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$. Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi \colon \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z} \qquad \text{mit} \qquad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \qquad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

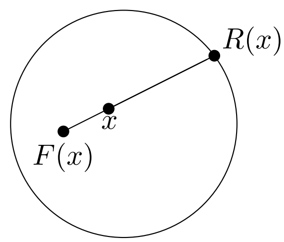


Abbildung 2.2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Ein Lift von $\gamma_1\gamma_2$ ist

$$\widetilde{\gamma_1\gamma_2} = \begin{cases} \tilde\gamma_1(2t) & 0 \le t \le 1/2\ , \\ \tilde\gamma_1(1) + \tilde\gamma_2(2t-1) & 1/2 \le t \le 1\ , \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $t \mapsto \tilde\gamma(t)+n$ ein Lift von γ ist, wenn $\tilde\gamma$ ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde\gamma(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde\gamma(t)} \cdot e^{2\pi i n} = \gamma(t) \cdot 1\ .$$

Also ist Φ ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass γ dabei gerade auf die Umlaufzahl $\nu_{(\gamma,0)}$ aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien γ_0, γ_1 Schleifen in S^1 mit Lifts $\tilde\gamma_0$, $\tilde\gamma_1$, so dass $\tilde\gamma_0(0) = \tilde\gamma_1(0) = 0$ und $\tilde\gamma_0(1) = \tilde\gamma_1(1) = n \in \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie $\tilde H$ zwischen $\tilde\gamma_0$ und $\tilde\gamma_1$ (Übung 2.75). Dann ist $p \circ \tilde H$ eine relative Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, also folgt $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Zur Surjektivität betrachte zu $n \in \mathbb{Z}$ die Schleife γ_n mit Lift $\tilde\gamma_n$, wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2nint} \qquad \text{und} \qquad \tilde\gamma_n(t) = nt\ . \qquad \square$$

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.78 und 2.79. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.27. Bemerkung. Jede stetige Funktion $f\colon D^1 = [-1,1] \to [-1,1]$ hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto x - f(x)\ .$$

Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $g(x) = 0$. Da $g(-1) \le 0$ und $g(1) \ge 0$, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.28. Bemerkung. Ein Retrakt in einer Kategorie ist ein Morphismus $r\colon X \to Y$, so dass es einen Morphismus $\iota\colon Y \to X$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_Y$ gibt. Wenn wir in $\mathcal{T}op$ arbeiten und Y mit $\operatorname{im}\iota \subset X$ identifizieren, erhalten wir genau den Begriff aus Definition 2.9. Funktoren bilden Retrakte auf Retrakte ab (Übung), also erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathrm{id}_{\pi_1(Y,y)}\colon \pi_1(Y,y) \xrightarrow{\pi_1\iota} \pi_1(X,x) \xrightarrow{\pi_1 r} \pi_1(Y,y)\ .$$

Man kann sogar zeigen, dass $\pi_1(X,x) \cong \ker(\pi_1 r) \rtimes \operatorname{im}(\pi_1\iota)$.

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $D^n \to D^n$, siehe Satz **??**.

2.29. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz, $n = 2$). *Jede stetige Abbildung $F\colon D^2 \to D^2$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion $R\colon D^2 \to \partial D^2 = S^1$ wie in Abbildung 2.2. Da $\pi_1(D^2,1)=0$ und $\pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}$, widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass $\min_{x\in D^2} d(F(x),x)>0$ wegen Kompaktkeit von D^2. Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von $F(x)$ nach x über x hinaus fortsetzen, bis sie S^1 schneidet, und x den Schnittpunkt $R(x)$ zuordnen. Falls $x\in S^1$, ist $x=R(x)$ dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion. □

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $S^n \to \mathbb{R}^n$, wird hier aber nur für $n=2$ bewiesen.

2.30. Satz (Borsuk-Ulam). *Sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x)=f(-x)$.*

Beweis. Falls nicht, existiert eine Abbildung $G\colon S^2 \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit

$$G(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}\ ,$$

und es folgt $G(x) = -G(-x)$ auf ganz S^2. Betrachte den Äquator

$$\gamma\colon [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ohne Einschränkung gelte $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$, anderfalls drehen wir $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ entsprechend. Es sei $g = G\circ\gamma$. Wir wollen $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ bestimmen. Sei dazu $\tilde g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ein Lift von $g\colon [0,1] \to S^1$ wie in Satz 2.26 unter der Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ mit $p(t) = e^{2\pi t}$ aus Beispiel 2.24. Aus

$$g(t+1/2) = G\bigl(-\gamma(t)\bigr) = -(G\circ\gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde g(t+1/2) - \tilde g(t) \in \mathbb{Z} + 1/2\ ,$$

da $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z}+1/2$. Da der obige Ausdruck stetig von t abhängt und $\mathbb{Z}+1/2$ diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde g(1) - \tilde g(0) = \bigl(\tilde g(1) - \tilde g(1/2)\bigr) + \bigl(\tilde g(1/2) - \tilde g(0)\bigr) = 2\bigl(\tilde g(1/2) - \tilde g(0)\bigr) \in 2\mathbb{Z}+1\ .$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ abgebildet. Der Äquator γ ist aber null-homotop in S^2. Sei H eine Homotopie von γ zur konstanten Schleife, dann ist $G\circ H$ eine Homotopie von g zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt. □

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.78 und 2.79, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte“ Situationen gibt, in denen eine beliebig kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von F um weniger als $\varepsilon > 0$ in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen G_i enthält, und in der keine „unnötigen“ Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt“ der Gruppen G_i heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie $\mathcal{G}rp$ der Gruppen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen G_i paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von G_i als (i,g) „markieren“.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& w'g_1g_2w''ew''' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
w'(g_1g_2)w''ew''' \arrow[dr] & & w'g_1g_2w''w''' \arrow[dl] \\
& w'(g_1g_2)w''w''' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& w'g_1g_2g_3w'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
w'(g_1g_2)g_3w'' \arrow[dr] & & w'g_1(g_2g_3)w'' \arrow[dl] \\
& w'(g_1g_2g_3)w'' &
\end{tikzcd}$$

ABBILDUNG 2.3. Kürzen im freien Produkt (Beispiele)

2.31. DEFINITION. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Ein *Wort* w im Alphabet $\dot\bigcup_i G_i$ ist ein Tupel $g_1 \dots g_k$ der endlichen *Länge* $\ell(w) = k \geq 0$ von *Buchstaben* $g_j \in G_{i_j}$ mit $i_j \in I$. Schreibe $\emptyset$ für das leere Wort. Ein Wort heißt *gekürzt* oder *reduziert,* wenn

(1) kein Buchstabe ein neutrales Element $e_i \in G_i$ ist, und
(2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben g_j, g_{j+1} zur gleichen Gruppe $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$ gehören.

Ein Wort *kürzen* oder *reduzieren* heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

(1) Weglassen eines Einselementes $e_i \in G_i$ an einer beliebigen Stelle des Wortes,
$$w'e_iw'' \mapsto w'w'' ,$$
(2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben g_j, $g_{j+1} \in G_{i_j}$ aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,
$$w'g_jg_{j+1}w'' \mapsto w'(g_jg_{j+1})w'' .$$

Zwei Wörter w, w' heißen *äquivalent,* wenn es eine Kette $w = w_0, \dots, w_n = w'$ von Wörtern gibt, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ entweder w_i aus w_{i-1} oder w_{i-1} aus w_i durch einen der obigen Schritte entsteht.

Da wir Ketten spiegeln und aneinanderhängen können, ist „Äquivalenz“ eine Äquivalenzrelation. Beim Reduzieren nimmt die Anzahl der Buchstaben ab. Da wir nur Wörter endlicher Länge betrachten, erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein gekürztes Wort. Wichtig ist, dass dieses gekürzte Wort nicht davon abhängt, in welcher Weise wir beim Kürzen vorgehen.

2.32. PROPOSITION. *Jede Äquivalenzklasse von Wörtern enthält genau ein gekürztes Wort.*

BEWEIS. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Falls es zwei äquivalente reduzierte Wörter w, w' gibt, betrachten wir eine Kette $w = w_0$, $\dots$, $w_n = w'$ zwischen ihnen wie in Definition 2.31. Falls $n > 0$, muss es ein Wort w_{i_0} maximaler Länge innerhalb der Kette geben, und es folgt $0 < i_0 < n$. Falls $w_{i_0-1} = w_{i_0+1}$ gilt, können wir zwei Elemente aus der Kette streichen und erhalten eine kürzere Kette zwischen w und w'.

Andernfalls entstehen w_{i_0-1} und w_{i_0+1} durch verschiedene Kürzungsschritte aus w_{i_0}. Wenn diese Kürzungen an getrennten Stellen im Wort passieren, kann man sie in beliebiger Reihenfolge durchführen. Falls sich die Buchstabengruppen überschneiden, stammen hingegen alle beteiligten Buchstaben aus der selben Gruppe G_i. Indem wir beide Kürzungsschritte kombinieren, bekommen wir ein neues Wort w'_{i_0} durch Kürzen sowohl aus w_{i_0-1} als auch aus w_{i_0+1}, siehe Abbildung 2.3. Wenn wir w_{i_0} durch w'_{i_0} ersetzen, haben wir eine neue Kette. In jedem der beiden Fälle hat sich die Summe der Längen der beteiligten Wörter verringert, also terminiert das Verfahren nach endlich vielen Schritten bei einer “minimalen” Kette zwischen w und w'. Diese hat zwangsläufig die Länge $n = 0$, so dass $w = w'$ folgt. $\square$

2.33. Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt* $*_i G_i = \coprod_i G_i$ der G_i ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen $\iota_j \colon G_j \to \coprod_i G_i$ mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j \ , \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\} \ . \end{cases}$$

2.34. Proposition. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen ι_j sind Homomorphismen.*

Beweis. Da es laut Beweis des Satzes 2.32 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1} \ .$$

Für alle $i \in I$ und alle $g \in G_i$ ist $\iota_i(g)$ gekürzt, und offensichtlich ist ι_i ein Homomorphismus. □

2.35. Beispiel. Es bezeichne $\mathbb{Z}/2$ die Gruppe mit zwei Elementen. Wir können uns $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ als Menge der Worte in zwei Buchstaben g und h vorstellen, wobei Kürzen heißt, zwei benachbarte gleiche Buchstaben zu streichen. Man kann zeigen, dass das genau die Isometriegruppe des metrischen Raumes $(\mathbb{Z}, d)$ mit $d(m,n) = |m-n|$ ist. Dabei entsprechen g und h Spiegelungen an zwei benachbarten Punkten in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Man nennt $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ auch die unendliche Diedergruppe.

2.36. Satz. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koprodukt auf der Kategorie der Gruppen.*

Beweis. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Analog zu Übung 1.150 erfüllt ihr Produkt

$$\prod_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\}$$

mit komponentenweiser Multiplikation, zusammen mit den Projektionen

$$p_j \colon \prod_{i\in I} G_i \to G_j \ , \qquad p_j((g_i)_{i\in I}) = g_j \ ,$$

die Eigenschaften eines Produkts in der Kategorie $\mathcal{G}rp$.

Nach Bemerkung 1.79 besagt die universelle Eigenschaft des Koproduktes, dass es zu jeder Gruppe H und Homomorphismen $f_i \colon G_i \to H$ genau einen Homomorphismus $f \colon *_{i\in I} G_i \to H$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ gibt. Wenn f existiert, ist f eindeutig bestimmt durch

$$f(g_1 \cdots g_k) = f_{i_1}(g_1) \cdots f_{i_k}(g_k) \in H \ ,$$

wobei $g_j \in G_{i_j}$ wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit f verträglich, da alle f_i Homomorphismen sind. Also ist f ebenfalls Homomorphismus. □

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, führen wir diese hier ein. Ein *Normalteiler* N einer Gruppe G ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Kerne von Gruppenhomomorphismen $F \colon G \to H$ haben diese Eigenschaft, denn sei $g \in G$, $k \in \ker F$, dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H \ ,$$

also $gkg^{-1} \in \ker F$.

Sei umgekehrt N ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \qquad \text{mit} \qquad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N \; .$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung $G \to G/N$ mit $g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern N.

2.37. Definition. Es sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Dann ist der von M erzeugte Normalteiler (M) von G der kleinste Normalteiler $N \subset G$, so dass $M \subset N$.

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir (M) explizit an.

2.38. Bemerkung. Es gilt

$$(M) = \bigl\{\, g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \bigm| k \geq 0, g_1, \dots, g_k \in G \text{ und } m_1, \dots, m_k \in M \,\bigr\} \; . \tag{*}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von M beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g\bigl(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1}\bigr) g^{-1} = (gg_1) m_1^{\pm 1} (gg_1^{-1}) \cdots (gg_k) m_k^{\pm 1} (gg_k)^{-1} \; .$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der M enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form $gm^{\pm 1}g^{-1}$, also ist die rechte Seite von (*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der M enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.39. Satz (Seifert-van Kampen). *Sei (X, x) ein punktierter Raum, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X, so dass*

(1) *jede Menge $U \in \mathcal{U}$ den Basispunkt x enthält, und*
(2) *jeder Durchschnitt $U \cap V$ für U, $V \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist.*

Dann ist die von den Homomorphismen $\iota_{U*} \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induzierte natürliche Abbildung

$$\varphi \colon \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

surjektiv. Falls darüberhinaus

(3) *jeder Durchschnitt $U \cap V \cap W$ für U, V, $W \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist,*

dann wird der Kern der Abbildung φ gegeben durch

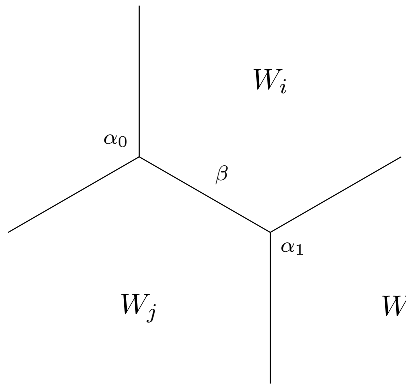
$$\ker \varphi = \Bigl(\Bigl\{\, (\iota_{U \cap V \to U})_*[\gamma]^{-1} \cdot (\iota_{U \cap V \to V})_*[\gamma] \Bigm| U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \,\Bigr\}\Bigr) \; . \tag{*}$$

Hier bezeichnen $\iota_U \colon U \to X$ und $\iota_{U \cap V \to U} \colon U \cap V \to U$ die Inklusionsabbildungen.

Beweis. Wir schreiben wieder $\alpha\beta$ für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.14.

Um zu zeigen, dass die Abbildung φ surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife $\gamma \colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Da $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$ ist, existiert nach dem Satz 1.63 von Lebesgue ein $n > 0$, so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \Bigl(\gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}\Bigr)\left(\frac{t+i-1}{n}\right)$$



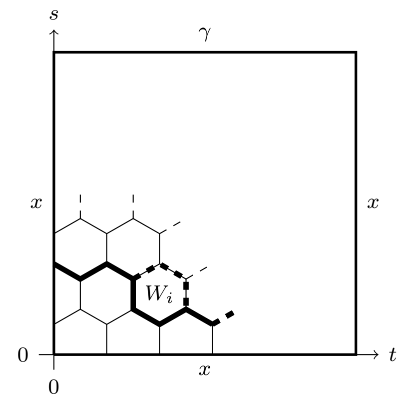


Abbildung 2.4. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

für $1 \leq i \leq n$ ganz in einer der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege α_i von x nach $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ in $U_i \cap U_{i+1}$. Also schreiben wir γ als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1\alpha_1^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_1 *}} \underbrace{\alpha_1\gamma_2\alpha_2^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_2 *}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1}\gamma_n}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_n *}} \in \operatorname{im} \varphi ,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (*) mit $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$. Sei $\gamma \in \pi_1(U \cap V, x)$, dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\overline{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U\cap V \to U})_*[\gamma]}_{\in \operatorname{im} \iota_{U *}} \cdot \underbrace{(\iota_{U\cap V \to V})_*[\gamma]^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{V *}} \in \pi_1(X, x) ,$$

woraus sich $N \subset \ker \varphi$ ergibt.

Sei umgekehrt $\gamma \in \ker \varphi$ dargestellt durch das Wort $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ für Schleifen γ_i in $U_i \in \mathcal{U}$. Dann existiert eine Homotopie $H \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ von der trivialen Schleife zu γ. Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ so in Waben zerlegen, dass jede Wabe $W_i \subset [0,1] \times [0,1]$ von H ganz in eine der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt (t, s) einen Weg α von x nach $H(t, s)$, der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen U_i, U_j, $U_k \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j, W_k verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife $\alpha_0\beta\alpha_1^{-1}$ beschreiben, die ganz im Durchschnitt der $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie H in eine Folge einzelner Homotopien H_i relativ zu x, die jeweils eine Wabe W_i überstreichen, siehe Abbildung 2.4. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*} \underbrace{[\alpha_0\beta\overline{\alpha}_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) ,$$

dabei gehört U_j hier stets zu einer Wabe W_j „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie H_i. Fall die Kante β an die Wabe W_i angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w' \iota_{(U_i \cap U_j \to U_i)*}[\sigma] w'' = \Big(w' \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*}[\sigma] w''\Big) \Big(w''^1 \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*}[\sigma]^{-1} \iota_{(U_i \cap U_j \to U_i)*}[\sigma] w''\Big) .$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von rechts mit einem Element von N, vergleiche Bemerkung 2.38.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe W_i gehören, durch Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzt haben, können wir die Homotopie H_i durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in U_i durch ein in U_i homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der $\pi_1(U, x)$ also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei γ aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere γ_i als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von N behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also $w \in \ker \varphi$ insgesamt als Produkt von Elementen von N geschrieben, also folgt $\ker \varphi \subset N$ und daher $\ker \varphi = N$. □

2.40. Beispiel. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ $= U \cup V$, wobei U und V kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von U und V sind. Wähle x_0 als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass $\pi_1(„8“, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

2.41. Beispiel. Ohne die erste Voraussetzung (1) läßt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

(1) Betrachte $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen $U_\pm = S^1 \setminus \{\pm i\}$. Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$ trivial. Auf der anderen Seite ist $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ nicht surjektiv. Das liegt daran, dass $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$ nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.
(2) Betrachte $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$, und setze $U_x = Y \setminus \{x\}$ für $x \in \{-i, 0, i\}$. Dann sind die drei Mengen U_x jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$. Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt $N = \{e\}$ und

$$\pi_1(Y, 1) = \big(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)\big)/N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} ,$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$\big(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)\big)/N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} ,$$

und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$ nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$ verletzt.

2.42. Bemerkung. Der Spezialfall $X = U \cup V$ im Satz 2.39 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht wesentlich einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

Seien G, H, K Gruppen und $a\colon K \to G$, $b\colon K \to H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von G und H über K durch

$$G *_K H = G * H \;/\; \big(\{\, a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \,\}\big) .$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie $\mathcal{G}rp$.

$$\begin{tikzcd}
 & & L \\
G \arrow[r, "i"] \arrow[urr, bend left, "g"] & G *_K H \arrow[ur, dashed, "f"] & \\
K \arrow[u, "a"] \arrow[r, "b"] & H \arrow[u, "j"] \arrow[uur, bend right, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Seien also $i\colon G \to G *_K H$ und $j\colon H \to G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, sei L eine Gruppe und seien $g\colon G \to L$, $h\colon H \to L$ Homomorphismen mit $g \circ a = h \circ b\colon K \to L$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f\colon G *_K H \to L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j \ .$$

Sei $X = U \cup V$ topologischer Raum mit U, V offen. Dann können wir X ebenfalls als Pushout längs der Inklusionen $U \cap V \hookrightarrow U$ und $U \cap V \hookrightarrow V$ auffassen, vergleiche Folgerung 1.86. Wenn wir einen Basispunkt $x \in U \cap V$ festlegen, erhalten wir einen Pushout $(X, x) = (U, x) \cup_{(U \cap V, x)} (V, x)$ in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$.

Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor π_1 den Pushout in $\mathcal{T}op_+$ auf den Pushout in $\mathcal{G}rp$ abbildet, falls $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, das heißt

$$\pi_1\big((U, x) \cup_{(U \cap V, x)} (V, x)\big) \cong \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x) \ .$$

Man beachte: Ein beliebiger Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ muss den Pushout in $\mathcal{C}$ nicht auf den in $\mathcal{D}$ abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.41 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter $\mathcal{F}$ in das Bild des Pushouts unter $\mathcal{F}$, siehe Übung 2.85.

2.43. Beispiel. Wir betrachten $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $U_\pm = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \mp 1)\}$ wie in Beispiel 1.104 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$, also sind $U_\pm$ zusammenziehbar. Schließlich ist S^{n-1} ein Deformationsretrakt von $U_+ \cap U_-$, und somit wegzusammenhängend für $n \geq 2$. Mit $x = (1, 0, \dots, 0)$ erhalten wir für $n \geq 2$, dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+ \cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\} \ ,$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in S^n für $n \geq 2$ von einem Punkt $y \in S^n$, der nicht getroffen wird, zum Basispunkt x „wegdrückt“. Beispiel 1.21 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in S^n treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.44. Beispiel. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.81 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im $\mathbb{R}^3$.

(1) Betrachte $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ via stereographischer Projektion in $S^3 \setminus S^1$ einbetten. Hierbei wird S^1 zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in S^3 sei $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Es sei V die obere Halbkugel, dann ist S^2 ein Deformationsretrakt von $U \cap V$. Also gilt nach Satz 2.39 mit $x = U \cap V$, dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) \ .$$

Jetzt bilden wir $S^3 \setminus S^1$ durch stereographische Projektion an einem Punkt der S^1 nach $\mathbb{R}^3$ ab und erhalten einen Homöomorphismus $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$. Aber S^1 ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} .$$

(2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter“ Kreise im Raum, genauer $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1,1\})$. Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned}\pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty,1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1,1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1,\infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} .\end{aligned}$$

Eine freies Produkt von k Kopien von $\mathbb{Z}$ nennt man auch die *freie Gruppe F_k mit k Erzeugern.*

(3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter“ Kreise im $\mathbb{R}^3$, nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos\psi + 1, \sin\psi) \varphi \in \mathbb{R}\}) .$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat Z die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos\psi, \sin\psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}) .$$

Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi) \,\middle|\, \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1 ,$$

und nach Übung 2.74 gilt

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ncong \pi_1(Y) .$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt“ waren oder nicht. Auch für Knoten im $\mathbb{R}^3$ ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht.

2.e. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen $\widetilde{X} \to X$ eines gegebenen topologischen Raumes X, und vergleichen die Fundamentalgruppen von $\widetilde{X}$ und X miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.23 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.45. Beispiel. In Beispiel 2.24 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von $S^1 \subset \mathbb{C}$ sind von der Form

$$p_k \colon S^1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^1 \qquad \text{mit} \qquad z \longmapsto z^k$$

für $0 < k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\operatorname{im} p_{k*} = k\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) .$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung $F\colon Y \to X$ in eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ verstehen wir eine Abbildung $\widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$. Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen $(Y, y_0) \to (X, x_0) \twoheadleftarrow (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er y_0 auf $\tilde{x}_0$ abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.25 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.26. Dort hatten wir für $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ gesehen, dass wir jede Schleife in (X, x_0) zu einem Weg in $\tilde{X}$ mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.46. Satz. *Sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, dann ist die Abbildung*

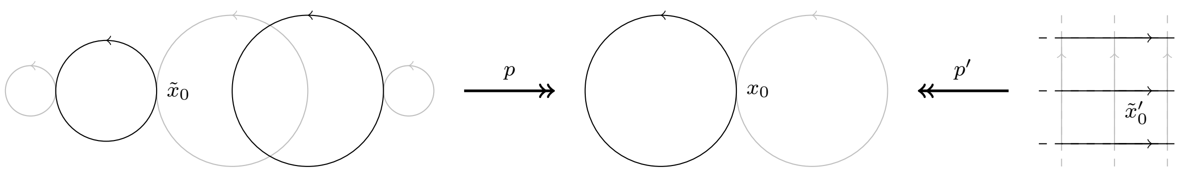
$$p_*\colon \pi_1\bigl(\widetilde{X}, \tilde{x}_0\bigr) \to \pi_1(X, x_0)$$

injektiv, und für $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ liegt $[\gamma]$ genau dann im Bild von p_*, wenn γ einen Lift $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$ besitzt.

Beweis. Sei $\tilde{\gamma}\colon S^1 \to \widetilde{X}$ eine Schleife, so dass $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.25 zu einer relativen Nullhomotopie von $\tilde{\gamma}$ liften. Also ist p_* injektiv.

Eine Schleife γ, deren Lift $\tilde{\gamma}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von p_*, da $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$. Sei umgekehrt γ eine Schleife mit $[\gamma] \in \operatorname{im}(p_*)$. Dann ist γ homotop zu einer Schleife der Form $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$. Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{\gamma}'$, also folgt $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$. □

2.47. Beispiel. Die „Acht“ $X = S^1 \vee S^1$ hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [**H1**]. Wir werden sehen, dass das Bild $\operatorname{im} p_*$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ die Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bereits bis auf Isomorphie festlegt.



Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung $F\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ zu einer Abbildung $\widetilde{F}\colon (Y, t_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$ liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.95. Falls Y lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist Y in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

2.48. Satz (Liftungssatz). *Sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung $F\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ genau dann zu einer Abbildung $\widetilde{F}\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$ liften, wenn*

$$\operatorname{im} F_* \subset \operatorname{im} p_* \subset \pi_1(X, p)\ . \tag{*}$$

In diesem Fall ist der Lift $\widetilde{F}$ durch $\widetilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ eindeutig bestimmt.

Falls Y nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

Beweis. Die Aussage „$\Longrightarrow$“ ist klar, da aus der Existenz von $\widetilde{F}$ bereits

$$\operatorname{im} F_* = \operatorname{im}\bigl(p_* \circ \widetilde{F}_*\bigr) \subset \operatorname{im} p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (*) erfüllt. Wir definieren einen Lift $\widetilde{F}$ wie folgt. Da Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist Y auch wegzusammenhängend. Also können wir zu jedem $y \in Y$ einen Pfad σ von y_0 nach y angeben, und finden dazu wie im Beweis von Satz 2.26 einen eindeutigen Lift $\tilde{\tau}$ von $\tau = F \circ \sigma$ mit Anfangspunkt $\tilde{\tau}(0) = x_0$. Wir setzen $\widetilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$. Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von $\widetilde{F}$.

Um zu zeigen, dass $\widetilde{F}$ wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg σ' von y_0 nach y und konstruieren einen Lift $\tilde{\tau}'$ von $\tau' = F \circ \sigma'$ wie oben. Dann ist $\tau'\bar{\tau} \in \operatorname{im} F_* \subset \operatorname{im} p_*$ nach (*), also existiert ein geschlossener Lift $\widetilde{\tau'\bar{\tau}}$ nach Satz 2.46. Das heisst, ein Lift $\tilde{\bar{\tau}}$ von $\bar{\tau}$ startet bei $\tilde{\tau}'(1)$ und führt zu $\tilde{x}_0$. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist $\tilde{\bar{\tau}} = \bar{\tilde{\tau}}$, und es folgt $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$, was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von $\widetilde{F}$ sei $y \in Y$, und sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x = F(y)$ in X. Dann existiert eine Umgebung $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ von $\tilde{x} = \widetilde{F}(y)$, so dass $p\colon \widetilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich U so wählen, dass $\widetilde{U}$ als Umgebung von $\tilde{y}$ beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von F ist $F^{-1}(U)$ offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset F^{-1}(U)$ von y.

Sei σ ein Weg von y_0 nach y. Sei $\tilde{\tau}$ der Lift von $\tau = F \circ \sigma$ wie oben, so dass also $\tilde{\tau}(1) = \widetilde{F}(y)$. Sei $y' \in V$, und sei α ein Weg von y nach y' in V. Da $\beta = F \circ \alpha$ in U verläuft, hat β einen Lift $\tilde{\beta} = (p|_{\widetilde{U}})^{-1} \circ \beta$ in $\widetilde{U}$. Dann ist $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$ ein Lift von $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$, und es folgt

$$\widetilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \widetilde{U} .$$

Also gilt $\widetilde{F}(V) \subset \widetilde{U}$, und da $\widetilde{U}$ beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ bei y. Da y beliebig war, ist $\widetilde{F}$ stetig. □

2.49. Bemerkung. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.88. Zur Eindeutigkeit von $\widetilde{F}$ reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend. Seien $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}'\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ Lifts von F. Dann ist die Menge

$$\{\, y \in Y \mid \widetilde{F}(y) = \widetilde{F}'(y) \,\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz Y überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen von X. Unter Umständen trägt der Quotient X/G, dessen Punkte die Bahnen der G-Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung $X \twoheadrightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.

2.50. Definition. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe Γ auf einem topologischen Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus ρ von Γ in die Gruppe $\operatorname{Aut} X$ der Homöomorphismen von X. Schreibe ρ_γ oder kurz $\gamma\colon X \to X$ für das Bild von $\gamma \in \Gamma$.

Eine *Bahn* von ρ (oder auch kurz von Γ) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\, \rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma \,\} \subset X$$

mit $x \in X$. Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\, \Gamma x \mid x \in X \,\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p\colon X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X/\Gamma \qquad \text{mit} \qquad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum X/Γ trage die Quotiententopologie unter p.

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.51. Definition. Eine Gruppenwirkung von Γ auf X heißt *frei*, wenn für alle $x \in X$ und alle $\gamma \in \Gamma$ aus $\gamma(x) = x$ bereits $\gamma = e$ folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U in X besitzt, so dass $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ falls $\gamma(x) \neq x$.

Wenn Γ frei wirkt, kann $\gamma(x) = x$ nur für das neutrale Element gelten.

2.52. Beispiel. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

(1) Es sei $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ und $\gamma(x) = x+\gamma$. Dann ist der Quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph zu $S^1 \subset \mathbb{C}$ wie in Beispiel 2.24 via
$$\mathbb{Z}x \longmapsto e^{2\pi i x} .$$
Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ das Intervall $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, dann gilt $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(2) Es sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eingekürzter Bruch und $\gamma(z) = e^{2\pi i r\gamma} \cdot z$. Elemente $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ wirken trivial, das heißt, es gilt $\gamma(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu $z \in S^1$ wähle
$$U = \left\{ e^{2\pi i\varphi} \cdot z \;\middle|\; \varphi \in \left(-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \right) \right\} ,$$
dann gilt $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$.

Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ wirkt ebenfalls auf S^1. Der Quotient ist homöomorph zu S^1 via
$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \longmapsto z^q \in S^1 ,$$
und die Abbildung $S^1 \to S^1$ ist dieselbe wie in Beispiel 2.45. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

(3) Es seien X, Γ wie in (2), aber $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann liegen alle Bahnen dicht in X. Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist X/Γ jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von $z \in S^1$ trifft jede noch so kleine Umgebung U: Zu jeder Umgebung U von $z \in S^1$ existiert also $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\rho_n(z) \in U$, insbesondere $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$.

2.53. Proposition. *Es sei ρ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe Γ auf X. Dann ist die Projektionsabbildung $p\colon X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

Beweis. Es sei $y = \Gamma x \in X/\Gamma$, und es sei U eine Umgebung von x wie in Definition 2.51. Es sei $V = p(U) \in X/\Gamma$, dann folgt aus Definition 2.51, dass
$$p^{-1}(V) = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma(U) \subset X .$$
Wir dürfen U als offen annehmen. Dann sind alle $\gamma(U)$ und somit auch ihre Vereinigung $p^{-1}(V)$ offen. Und $A \subset p^{-1}(V)$ ist genau dann offen in X, wenn alle $A \cap \gamma(U)$ offen sind. Das heißt, $B \subset V$ ist genau dann offen in der Quotiententopologie, wenn $p^{-1}(B) \cap \gamma(U)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ offen ist, und dafür reicht es, dass $p^{-1}(B) \cap U$ offen ist. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus
$$p^{-1}(V) \cong \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U ,$$
das heißt, $V \subset X/\Gamma$ ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle $y \in X/\Gamma$ funktioniert, folgt unsere Behauptung. □

2.54. Bemerkung. Der Raum X/Γ trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.85 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von X auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Hierauf wirkt $\mathbb{Z}$ durch $n\,(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Da $(0,0) \notin X$, ist diese Wirkung frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa $(x,y) \in X$, dann können wir als Umgebung U wie in Definition 2.51 von x die Menge $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$ wählen, falls $x \neq 0$, oder die Menge $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$, falls $y \neq 0$.

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte $a = p(x,0)$ und $b = p(0,y) \in X/\Gamma$ lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen U von a und V von b gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{Z}$ so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V\ .$$

2.55. Definition. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $p\colon \tilde X \to X$ ist ein Homöomorphismus $F\colon \tilde X \to \tilde X$, so dass $p \circ F = p$. Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei $\tilde x_0, \tilde x_1 \in \tilde X$ mit $p(\tilde x_0) = p(\tilde x_1)$ eine Decktransformation F mit $F(\tilde x_0) = \tilde x_1$ gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.58.

2.56. Bemerkung. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung $p\colon \tilde X \to X$ bilden stets eine Gruppe Γ, die *Decktransformationsgruppe*. Sei $\tilde X$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift $\tilde p$ von $p\colon \tilde X \to X$ mit $\tilde p(\tilde x_0) = F(\tilde x_0) = \tilde x_1$ ist, wirkt Γ wegen der Eindeutigkeit der Lifte nach Satz 2.48 frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagerter Umgebungen von Punkten in X betrachten, sehen wir, dass Γ auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls $p\colon \tilde X \to X$ normal ist, folgt $X \cong \tilde X/\Gamma$.

Seien umgekehrt X, Γ wie in Proposition 2.53 und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist $p\colon X \to X/\Gamma$ eine normale Überlagerung, und Γ ist die Gruppe der Decktransformationen. Also beschreiben „zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende, normale Überlagerungen“ und „Quotienten zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Räume nach freien und eigentlich diskontinuierlichen Gruppenwirkungen“ das gleiche Phänomen aus zwei verschiedenen Blickwinkeln.

2.57. Beispiel. Wir haben in Beispiel 2.52 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 in Beispiel 2.45 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.47 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$, also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur bei je einer horizontalen und vertikalen Geraden in dem Bild die Pfeile um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.58. Folgerung (aus dem Liftungssatz 2.48). *Es sei $p\colon \tilde X \to X$ eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien $x_0 \in X$ und $\tilde x_0, \tilde x_1 \in p^{-1}(x_0)$, und sei $\tilde\gamma$ ein Weg in $\tilde X$ von $\tilde x_0$ nach $\tilde x_1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *Es existiert eine Decktransformation $F\colon \tilde X \to \tilde X$ mit $F(\tilde x_0) = \tilde x_1$.*
2. *Es gilt $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)) = p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$.*
3. *Für $\gamma = p \circ \tilde\gamma$ gilt $[\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))[\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$.*

Insbesondere ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn $\operatorname{im} p_*$ Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist. In diesem Fall ist $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\operatorname{im}(p_*)$ isomorph zur Gruppe der Decktransformationen.

Beweis. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung p liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.48.

Wie im Satz 2.14 liefert $\sigma \mapsto \overline{\gamma}\sigma\gamma$ einen Isomorphismus von $\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$ mit $\pi_1(\tilde X, \tilde x_1)$. Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_1)) = [\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))[\gamma]\ ,$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege $\tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2$ von $\tilde x_0$ nach $\tilde x_1$ bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife $\tilde\gamma_2\overline{\tilde\gamma}_1$ am Punkt $\tilde x_0$ unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von $\tilde\gamma$ an.

Wenn $\operatorname{im} p_*$ ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und p ist normal. Sei umgekehrt p normal, also gilt (1) für alle $\tilde x_1 \in p^{-1}(x_0)$. Da sich jede Schleife γ in X zu einem Weg $\tilde\gamma$ von $\tilde x_0$ zu einem Punkt in $p^{-1}(x_0)$ liften lässt, folgt aus (3), dass $\operatorname{im} p_*$ ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $\tilde X$ zu konstruieren, betrachten wir zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ die nach dem Liftungssatz 2.48 eindeutige Decktransformation $\rho_{[\gamma]}\colon \tilde X \to \tilde X$, die den Basispunkt $\tilde x_0$ auf den Endpunkt $\tilde\gamma(1)$ des Lifts $\tilde\gamma$ von γ mit $\tilde\gamma(0) = \tilde x_0$ abbildet.

Wir müssen zeigen, dass ρ einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$, und sei $\tilde\gamma_1$ der Lift von γ_1 mit $\tilde\gamma_1(0) = \tilde x_0$. Dann folgt $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde x_0) = \tilde\gamma_1(1)$. Außerdem ist $\tilde\gamma' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde\gamma$ ein Lift von γ mit $\tilde\gamma'(0) = \tilde\gamma_1(1)$, also ist die Verkettung $\widetilde{\gamma_1\gamma} = \tilde\gamma_1\tilde\gamma'$ ein Lift von $\gamma_1\gamma$ mit $\widetilde{\gamma_1\gamma}(0) = \tilde x_0$. Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}\big(\rho_{[\gamma]}(\tilde x_0)\big) = \rho_{[\gamma_1]}\big(\tilde\gamma(1)\big) = \tilde\gamma'(1) = \widetilde{\gamma_1\gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1\gamma]}(\tilde x_0) \;.$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.48 folgt $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1\gamma]}$, und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.46 gerade die Elemente von $\operatorname{im} p_*$ zu Schleifen in $(\tilde X, \tilde x_0)$ liften, folgt $\ker\rho = \operatorname{im} p_*$, so dass die Gruppe $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\operatorname{im} p_*$ frei und wegen Bemerkung 2.56 auch eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde X$ wirkt, mit $X \cong \tilde X/\Gamma$. □

2.f. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.46 bestimmt jede Überlagerung $p\colon (\widetilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ eine Untergruppe $\operatorname{im} p_*$ der Fundamentalgruppe von (X, x_0). Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume X umgekehrt zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon (\widetilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{im} p_* = G$ gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.23 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ haben wir in Beispiel 2.24 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von X jede zusammenhängende Überlagerung von X überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.59. Definition. Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $\operatorname{im}(\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)) = 0$.

In Übung 2.89 geben wir ein Beispiel für einen Raum, der nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

2.60. Satz. *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende topologische Raum hat genau dann eine universelle Überlagerung, wenn er semilokal einfach zusammenhängend ist.*

2.61. Bemerkung. Ein topologischer Raum muss nicht lokal wegzusammenhängend sein, um eine Überlagerung zu besitzen, die die universelle Eigenschaft aus Folgerung 2.63 unten zu hat. Allerdings können wir solch eine Überlagerung dann nicht mehr durch unsere Definition von „einfach zusammenhängend“ charakterisieren.

Beweis von Satz 2.60. Sei $\widetilde X \to X$ eine universelle Überlagerung, sei $U \subset X$ eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x \in X$, sei $\widetilde U$ eine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$ und sei $\tilde x \in \widetilde U$ das Urbild von x in $\widetilde U$. Dann folgt $\operatorname{im}(\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)) = \{e\}$

aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r] \arrow[d, "p|_{\widetilde{U}}"', "\cong"] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\widetilde{U},\tilde{x}) \arrow[r] \arrow[d, "(p|_{\widetilde{U}})_*"', "\cong"] & \pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}) = \{e\} \arrow[d, "p_*"'] \\ \pi_1(U,x) \arrow[r] & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

Für die Rückrichtung nehmen wir zunächst an, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.46, dass eine Schleife γ in X mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in X nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege σ, σ' von x_0 nach $x \in X$ genau dann Lifts $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ mit $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$ und gleichem Endpunkt $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$ haben werden, wenn σ und σ' homotop sind. Also betrachten wir die Menge

$$\widetilde{X} = \bigl\{\, \sigma\colon [0,1] \to X \bigm| \sigma(0) = x_0 \,\bigr\} /\sim \qquad \text{und} \qquad p([\sigma]) = \sigma(1)\;,$$

wobei „$\sim$“ hier Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ bezeichne. Als Fußpunkt $\tilde{x}_0$ wählen wir die relative Homotopieklasse der konstanten Schleife am Punkt x_0.

Sei jetzt $x \in X$. Weil X semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert eine Umgebung U von x mit $\operatorname{im}(\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)) = 0$. Wegen Funktorialität von π_1 überträgt sich diese Eigenschaft auf alle kleineren Umgebungen V von x. Weil X außerdem lokal wegzusammenhängend ist, hat x eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ aus wegzusammenhängenden Umgebungen $V \subset U$ von x.

Für einen Weg $\sigma\colon [0,1] \to X$ mit $\sigma(0) = x_0$ und $V \in \mathcal{U}_{\sigma(1)}$ betrachte

$$U([\sigma],V) = \bigl\{\, [\sigma\beta] \bigm| \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \,\bigr\} \subset \widetilde{X}\;;$$

diese Menge hängt nur von der relativen Homotopieklasse von $[\sigma]$ ab. Dann ist die Abbildung

$$p|_{U([\sigma],V)}\colon U([\sigma],V) \longrightarrow V \qquad \text{mit} \qquad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \tag{*}$$

eine Bijektion. Surjektivität folgt, da V wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege β, β' in V mit gleichem Anfangspunkt x und gleichem Endpunkt die Schleife $\beta'\beta^{-1}$ in V ja in X zusammenziehbar ist, und somit also auch $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \widetilde{X}$.

Wir definieren eine Topologie auf $\widetilde{X}$ indem wir zu jedem Punkt $[\sigma] \in \widetilde{X}$ die Umgebungsbasis

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]} = \bigl\{\, U([\sigma],V) \bigm| V \in \mathcal{U}_{\sigma(1)} \,\bigr\}$$

vorgeben. Insbesondere ist $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ genau dann offen, wenn für alle $[\sigma] \in \widetilde{U}$ eine Menge $U([\sigma],V) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]}$ mit $U([\sigma],V) \subset \widetilde{U}$ existiert. Man überlegt sich, dass die Abbildung $p\colon U([\sigma],V) \to V$ aus (*) für alle $U([\sigma],V) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]}$ ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist p stetig, und alle $U([\sigma],V)$ sind gleichmäßig überlagert. Wir haben also eine Überlagerung konstruiert.

Der Raum $\widetilde{X}$ ist wegzusammenhängend, denn für jeden Punkt $[\sigma]$ ist $s \mapsto [\sigma|_{[0,s]}]$ ein Weg in $\widetilde{X}$ vom konstanten Weg $\tilde{x}_0$ zum Punkt $[\sigma]$. Er ist auch einfach zusammenhängend. Denn sei $\tilde{\gamma}$ eine Schleife in $\widetilde{X}$, also eine Familie von Wegen $\gamma_t\colon [0,1] \to X$, so dass $t \mapsto [\gamma_t]$ bezüglich der obigen Topologie stetig ist. Dann zerlegen wir $[0,1]$ in Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, so dass jedes Teilintervall in eine Menge der Form $U([\sigma_i],V_i)$ abgebildet wird. Durch Induktion über i schließen wir, dass $p \circ \tilde{\gamma}|_{[0,t_i]}$ in X zu γ_{t_i} homotop ist. Da $[\gamma_1] = \tilde{x}_0$ zur konstanten Schleife homotop ist, ist also $p_*[\tilde{\gamma}] = [\gamma_1] = 0 \in \pi_1(X,x_0)$. Aus Satz 2.46 folgt $\pi_1\bigl(\widetilde{X},\tilde{x}_0\bigr) = 0$. □

2.62. Bemerkung. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ durch $[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma]$. Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass $\widetilde{X}/\pi_1(X,x_0) \cong X$. Das passt zu Folgerung 2.58, da die Gruppe $\operatorname{im} p_* = \{e\}$ trivial und insbesondere ein Normalteiler von $\pi_1(X,x_0)$ ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.63. Folgerung. *Es sei* (X, x_0) *zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei* $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *eine universelle Überlagerung.*

(1) *Es sei* $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung* $r\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (Y, y_0)$ *mit* $p = q \circ r$*, und* r *ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von* Y*.*
(2) *Sei insbesondere* $p'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ *eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus* $F\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$*, so dass* $p = p' \circ F$*.*

Wenn Y in (1) nicht zusammenhängend ist, trifft r zwar nur die Zusammenhangskomponente von y_0, ist aber nach unserer Definition 2.23 dennoch eine universelle Überlagerung.

Beweis. Da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes r von p aus Satz 2.48, da $\{e\} = \operatorname{im} p_* \subset \operatorname{im} q_*$. Um zu sehen, dass r eine Überlagerung ist, wählen wir zu $y \in Y$ eine wegzusammenhängende Umgebung U von $x = q(y)$, die sowohl von p als auch von q gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$ und $q^{-1}(U)$ jeweils homöomorph zu U via p beziehungsweise q. Sei $V \subset Y$ die Wegzusammenhangskomponente von $q^{-1}(U)$, die y enthält. Da $p = q \circ r$, und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Also ist r eine Überlagerung von Y, und da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle.

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick. □

Wir wollen diese Folgerung benutzen, um zu zeigen, dass die Kategorie aller Überlagerungen eines Raumes X mit universeller Überlagerung wie oben zu einer Kategorie äquivalent ist, die nur von $\pi_1(X, x_0)$ abhängt.

2.64. Definition. Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist eine *Äquivalenz von Kategorien* , wenn er

(1) *essentiell surjektiv* ist, das heißt, wenn zu jedem $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ ein $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{F}A \cong B$ existiert, und
(2) *volltreu* ist, das heißt, wenn für alle A, $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ die Abbildung $\mathcal{F}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ eine Bijektion ist.

In dem Wort „volltreu“ steht „voll“ für die Surjektivität und „treu“ für die Injektivität der obigen Abbildung.

Es sei (X, x_0) zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Wir betrachten also eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) sind, und für $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ seien die Morphismen $F\colon p \to q$ gerade punktierte Abbildungen $r\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ mit $p = q \circ r$.

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\operatorname{Hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G \text{, und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Von der ersten in die zweite Kategorie erhalten wir einen Funktor, der $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ auf $\operatorname{im} p_* \subset \pi_1(X, x_0)$ abbildet. Für eine weitere Überlagerung $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ existiert nach dem Liftungssatz 2.48 höchstens eine punktierte Abbildung $r\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, und zwar genau dann, wenn $\operatorname{im} p_* \subset \operatorname{im} q_*$. Somit erhalten wir einen Funktor, und er ist volltreu. Er ist auch essentiell surjektiv, denn zu $G \subset \pi_*(X, x_0)$ können wir die punktierte Überlagerung $(\widetilde{X}/G, [\tilde{x}_0]) \to (X, x_0)$

betrachten. In gewissem Sinne ist $G \mapsto \big((\widetilde{X}/G, [\tilde{x}_0]) \to (X, x_0)\big)$ also invers zum obigen Funktor, und zwar bis auf eindeutige Isomorphismen.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von $\pi_1(X, x_0)$ auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$, wobei man einer Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$ die Menge der Rechtsnebenklassen $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$ zuordnet. Um aus einer diskreten Menge M mit $\pi_1(X, x_0)$-Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_\Gamma M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma ,$$

wobei γ auf $\tilde{X} \times M$ durch $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$ wirkt. Die Bahnen der Γ-Wirkung auf M entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung $\tilde{X} \times_\Gamma M$. Die obige Zuordnung läßt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers. Es folgt ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie.

Galois-Theorie	*Überlagerungstheorie*
Perfekter Körper K	Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum (X, x_0)
Algebraische Erweiterung $L \supset K$	Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$
Algebraischer Abschluss $\overline{K}$	Universelle Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$
Absolute Galoisgruppe $G = G(\widetilde{K}/K)$	Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$
abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$	Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$
Fixkörper von H	Quotient $(\widetilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \to (X, x_0)$
Normale Erweiterung $L \supset K$	Normale Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$
Relative Galoisgruppe $G(L/K)$	Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\operatorname{im} q_*)$

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume X die Algebra der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$ betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

2.g. CW-Komplexe

Wir erinnern uns an den Begriff „zusammenziehbar“ aus Definition 2.4.

2.65. Definition. Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenziehbar,* wenn jede Umgebung U eines Punktes x eine Umgebung V von x enthält, die sich auf x zusammenziehen lässt.

2.66. Bemerkung. (1) Lokal zusammenziehbare Räume sind insbesondere auch lokal wegzusammenhängend und (semi-) lokal einfach zusammenhängend.

(2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, und daher lokal zusammenziehbar. Sei etwa U eine beliebige Umgebung von $x \in M$, und sei V eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung von x. Dann ist $U \cap V$ zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um x.

2.67. Satz. *CW-Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

Im Beweis müssen wir eine Homotopie auf einer Teilmenge eines CW-Komplexes angeben. Dazu erinnern wir uns, dass ein CW-Komplex X nach Proposition 1.108 als Quotient der disjunkten Vereinigung all seiner Zellen geschrieben werden kann, also

$$X \cong \coprod_{n\in\mathbb{N}} \coprod_{i\in I^n} D^n \,/\sim .$$

Da $[0,1]$ (lokal) kompakt ist, gilt nach Übung 1.166 dann auch

$$X \times [0,1] \cong \coprod_{n\in\mathbb{N}} \coprod_{i\in I^n} (D^n \times [0,1]) \,/\sim .$$

Also können wir auch Homotopien Zelle für Zelle definieren. Wenn die gesamte Homotopie wohldefiniert ist, dann ist sie auch stetig.

Beweis. Sei X ein CW-Komplex, sei $x_0 \in e^{n_0}_{i_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$, und sei $U \subset X$ eine Umgebung von x_0. Sei $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$ das Bild eines kleinen abgeschlossenen Balles in B^{n_0} unter der charakteristischen Abbildung $\Phi^{n_0}_{i_0}$. Dann konstruieren wir für alle $n > n_0$ induktiv abgeschlossene Mengen $V^n \subset U \cap X^n$, so dass $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$ Deformationsrektrakt von V^n und $\mathring{V}^n$ Umgebung von x_0 in X^n ist. Für alle $i \in I^n$ sei dazu

$$\bigl(\Phi^n_i\bigr)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \frac{x}{|x|} \in \bigl(\varphi^n_i\bigr)^{-1}\bigl(V^{n-1}\bigr) \text{ und } |x| \ge 1 - \varepsilon^n_i \right\} \subset \bigl(\Phi^n_i\bigr)^{-1}(U) .$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon^n_i \in (0,1)$; dieses finden wir, da $\bigl(\varphi^n_i\bigr)^{-1}\bigl(V^{n-1}\bigr)$ kompakt und $\bigl(\Phi^n_i\bigr)^{-1}(U)$ offen ist. Anschliessend setzen wir $V = \bigcup V^n$.

Wir können jetzt eine Homotopie $H\colon V \times [0,1] \to V$ von der Identität zur konstanten Abbildung auf $x_0 \subset V$ konstruieren. Wir definieren zunächst für $n > n_0$ eine Homotopie $H^n\colon V^n \times [0,1] \to V^n$ zwischen der Identität und einer Retraktion auf V^{n-1} durch

$$H^n\bigl(\Phi^n_i(x), t\bigr) = \Phi^n_i\left(\frac{x}{|x|^t}\right)$$

für alle $x \in V^n \cap e^n_i$. Hier nutzen wir aus, dass $\varepsilon^n_i < 1$, also $|x| > 0$ für alle $x \in (\Phi^n_i)^{-1}(V^n)$. Außerdem definieren wir $H^{n_0}\colon V^{n_0} \times [0,1] \to V^{n_0}$ durch

$$H^{n_0}\bigl(\Phi^{n_0}_{i_0}(x), t\bigr) = \Phi^{n_0}_{i_0}\Bigl((1-t)\,x + t\,\bigl(\Phi^{n_0}_{i_0}\bigr)^{-1}(x_0)\Bigr) .$$

Wir schreiben $P^n = H(\,\cdot\,,1)\colon V^n \to V^{n-1}$ und definieren $H\colon V \times [0,1] \to V$ für $x \in V^n$ durch

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le t \le 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}\bigl((P^{n'+1} \circ \dots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}\,t - 1\bigr) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \le t \le 2^{n_0-n'} . \end{cases}$$

Für die Stetigkeit von H reicht es nach Vorbemerkung, dass $H(\Phi^n_i(\,\cdot\,),\,\cdot\,)\colon V^n \times [0,1] \to X$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$ stetig ist. Wir schreiben $[0,1]$ als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0,1] = \bigl[0, 2^{n_0-n-1}\bigr] \cup \bigl[2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}\bigr] \cup \dots \cup \bigl[2^{-1}, 2^0\bigr]$$

und benötigen mit einem ähnlichen Argument nur die Stetigkeit von $H(\Phi^n_i(\,\cdot\,),\,\cdot\,)$ auf dem Produkt des kompakten Raums $V^n \cap e^n_i$ mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der

Konstruktion der H^n und H. Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe $t = 0$ aufgrund der Quotiententopologie auf X keine Probleme mit der Stetigkeit bei $t = 0$ bekommen. □

2.68. Bemerkung. Sei M eine Familie von *Erzeugern* von G, und sei $R \subset *_{m\in M}\mathbb{Z}$ eine Menge von *Relationen* in der von den Elementen von M erzeugten freien Gruppe F. Dann sei $N = (R)$ der von den Relationen erzeugte Normalteiler von F. Wir schreiben

$$G = F/N = \langle\, M \mid R \,\rangle \;,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe G. Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir $M = G$ setzen, dann ist F die Menge aller Wörter in M (wobei wir die Gruppenstruktur von G vergessen haben). Dann wählen wir $R = \ker(F \to G)$, wobei wir jedes Wort in F auf das entsprechende Produkt in G abbilden.

Jetzt haben wir also eine Möglichkeit, jede Gruppe durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben. Allerdings sind die folgenden Probleme im Allgemeinen nicht algorithmisch lösbar.

(1) *Wortproblem.* Stellt ein Wort w in $\langle\, M \mid R \,\rangle$ das neutrale Element dar?
(2) *Isomorphieproblem.* Sind zwei Gruppen $\langle\, M_1 \mid R_1 \,\rangle$ und $\langle M_2 \mid R_2 \,\rangle$ isomorph?

Unter einem *maximalen Baum* in einem punktierten CW-Komplex (X, x_0) mit $x_0 \in X^0$ verstehen wir einen maximalen einfach zusammenhängenden Unterkomplex $Y \subset X^1$ mit $x_0 \in Y$.

2.69. Satz. *Sei X ein wegzusammenhängender CW-Komplex und $x_0 \in X^0$.*

(1) *Dann existiert $J^1 \subset I^1$, so dass*
$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j\in J^1} e^1_j$$
ein maximaler Baum in X ist.
(2) *Für J^1 wie in* (1) *gilt*
$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \langle\, I^1 \setminus J^1 \,\rangle \cong \coprod_{i\in I^1\setminus J^1} \mathbb{Z} \;.$$
(3) *Es sei $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann gilt*
$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0)/(\{\varphi^2_{i*}[\sigma] \mid i \in I^2\}) \;.$$
(4) *Es gilt*
$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \big\langle\, \{\, [\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J \,\} \;\big|\; \{\, \varphi^2_{i*}[\sigma] \mid i \in I^2 \,\} \,\big\rangle \;.$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen CW-Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.70 und Beispiel 2.71 ausnutzen.

Beweis. Zu (1) betrachten wir die Menge $\mathcal{Y}$ aller Bäume in X^1, das heißt, aller einfach zusammenhängenden Unterkomplexe von X, die den Punkt x_0 enthalten. Diese Menge ist durch Inklusion halb geordnet, und jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$ hat als obere Schranke die Vereinigung aller zu $\mathcal{Y}'$ gehörigen Unterkomplexe von X^1. Die Vereinigung ist wieder einfach zusammenhängend, denn jede Schleife trifft nach Satz 1.112 nur endlich viele Zellen, ist also bereits vollständig in einem der Unterkomplexe enthalten, und nach Voraussetzung in diesem auch zusammenziehbar. Nach dem

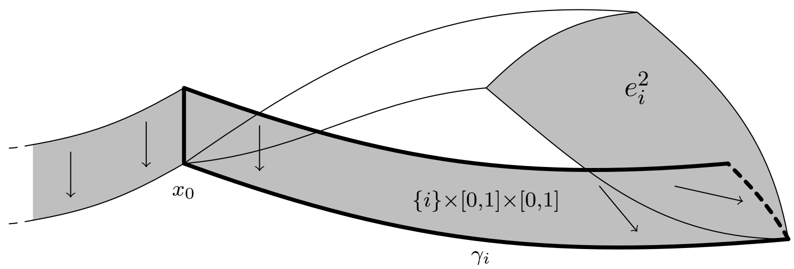


Abbildung 2.5. Der Raum $\overline{X}^n$

Lemma von Zorn existiert also ein maximaler Baum $Y \subset X^1$. Es seien $J^0 \subset I^0$ und $J^1 \subset I^1$ die Indexmengen der an Y beteiligten 0- und 1-Zellen von X^1.

Wenn X wegzusammenhängend ist, folgt $J^0 = I^0$. Denn gäbe es einen Punkt $z \in X^0 \setminus Y^0$, dann gäbe es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ von x_0 nach z. Es sei $t_0 \in [0,1]$ maximal mit $\gamma(t_0) \in Y$, dann befindet sich $\gamma(t_0 + \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug innerhalb einer Kante von $X^1 \setminus Y$, die von Y zu einem Punkt führt, der nicht in Y enthalten ist, und wir können Y als Baum vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität.

Zu (2) betrachten wir die offenen Teilmengen

$$U_0 = X^1 \setminus \left\{ \Phi_i^1(0) \,\middle|\, i \in I^1 \setminus J^1 \right\} \qquad \text{und} \qquad U_k = U_0 \cup e_k^1 \subset X^1$$

für alle $k \in I^1 \setminus J^1$. Die Menge U_0 hat Y als Deformationsretrakt und ist daher einfach zusammenhängend. Für jede Menge U_k finden wir eine Schleife durch den Punkt x_k, die nicht zusammenziehbar ist. Man kann jetzt zeigen, dass sich U_k auf diese Schleife zusammenziehen lässt, und erhält insbesondere $\pi_1(U_k, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Alle Durchschnitte zweier oder mehr der Mengen U_k ergeben die Menge U_0, sind also einfach zusammenhängend. Aus dem Satz 2.39 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung.

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$ zu $\pi_1(X^n, x_0)$ für $n \geq 2$ zu gelangen, vergrößern wir X^n zu $\overline{X}^n$, siehe Abbildung 2.5. Dazu wählen wir für jedes $i \in I^n$ einen Weg γ_i von x_0 zum Bild x_i des Basispunktes von S^{n-1} unter der Verklebeabbildung φ_i. Wir verkleben $I^n \times [0,1] \times [0,1]$ wie folgt mit X^n.

(1) Wir identifizieren alle Strecken $\{(i,0)\} \times [0,1]$ miteinander und kleben $[(i,0,0)]$ an den Punkt x_0.
(2) Wir verkleben $\{i\} \times [0,1] \times \{0\}$ entlang von $\gamma_i\colon [0,1] \times \{0\}$ mit X^{n-1}.
(3) Wir kleben $\{1\} \times [0,1]$ auf eine Strecke in e_i^n vom Punkt x_i ins Innere der Zelle bis zum Radius $1/2$.

Dann ist X^n ein Deformationsretrakt von $\overline{X}^n$, indem wir jedes Quadrat $\{i\} \times [0,1] \times [0,1]$ auf das Bild von $\{i\} \times ([0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1])$ zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \overline{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n\Big(D^n_{1/2}\Big) ,$$

wobei $D^n_{1/2} \subset D^n$ den abgeschlossenen Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezeichne, siehe Abbildung 2.6. Dann ist X^{n-1} ein Deformationsretrakt von U_0.

Nach Satz 2.67 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von x_0 in $X^n \cap U_0$. Es sei $V_0 \subset \overline{X}^n$ ihr Urbild unter der Retraktion $r_n\colon \overline{X}^n \to X^n$, dann ist V_0 ebenfalls zusammenziehbar. Für $i \in I^n$ setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0,1] \times (0,1]) \cup e_i^n \ .$$

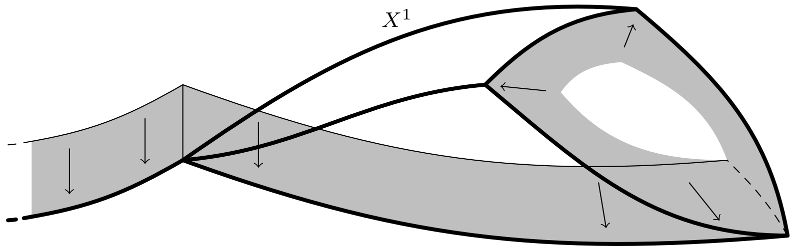


ABBILDUNG 2.6. Die Umgebung U_0 von X^{n-1}

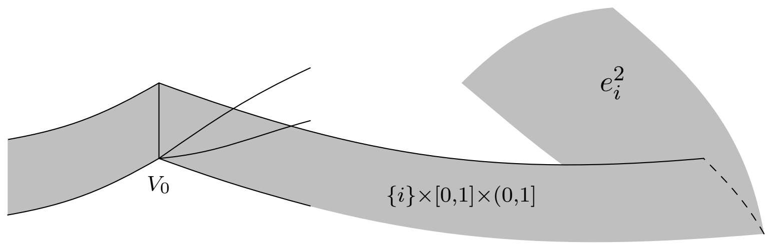


ABBILDUNG 2.7. Der Raum U_i

Man überzeugt sich, dass U_i ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 2.7.

Für $i \neq j \in I^n$ ist $U_i \cap U_j = V_0$ zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0,1] \times (0,1]) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D_{1/2}^n)$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt $\Phi_i^n(S_{3/4}^{n-1})$. Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{\, U_i \mid i \in I^n \,\}$ wegzusammenhängend sind.

Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} ,$$

wobei ein Erzeuger $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$ auf eine Schleife abgebildet wird, die in U_0 zu $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i$ homotop ist, siehe Abbildung 2.8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.39, da

$$\begin{aligned}\pi_1(X^2, x_0) = \pi_1(\overline{X}^2, x_0) &= \Big(\pi_1(U_0, x_0) * \coprod_{i \in I^n} \pi_1(U_i, x_0)\Big) \Big/ \big(\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}\big) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) \,/\, \big(\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}\big) .\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i]$ nach Satz 2.14 vom Weg γ_i abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.38 nicht von der Wahl von γ_i ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$ für $n \geq 3$ nach Beispiel 2.43 einfach zusammenhängend ist und somit $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$ analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion $\iota\colon X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei γ eine Schleife in X, dann verläuft γ in einem Gerüst X^n nach Satz 1.112, also ist die Abbildung

$$\iota_*\colon \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls γ nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie H zur trivialen Schleife ganz in einem X^n (wobei n jetzt größer sein kann), also ist ι_* auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

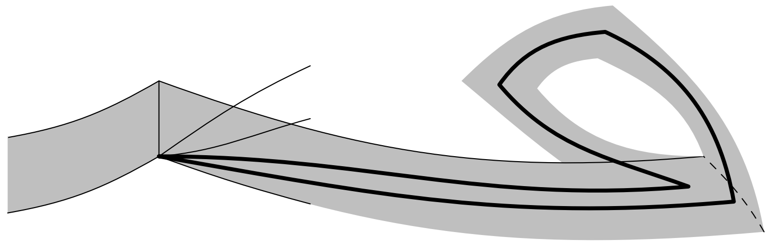


ABBILDUNG 2.8. Die Fundamentalgruppe von $U_0 \cap U_i$

Wir halten also fest, dass wir die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes berechnen können. Außerdem hat ein CW-Komplex nach Satz 2.67 eine universelle Überlagerung. Wir können mit den Ergebnissen aus dem vorigen Abschnitt also auch alle Überlagerungen eines CW-Komplexes beschreiben.

2.70. FOLGERUNG. *Sei G eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex X mit $\pi_1(X) \cong G$.*

BEWEIS. Sei G durch Erzeuger $M \subset G$ und Relationen R gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex X. Sei $X^0 = \{x_0\}$ das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle x_0.

Wir wählen $I^1 = M$, das heißt, für jeden Erzeuger $m \in M$ sei e^1_m eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an x_0 angeklebt sind. Dann ist $\{x_0\} \subset X^1$ ein maximaler Baum, also ist $F = \pi_1(X^1, x_0)$ die von den Schleifen $\{ e^1_m \mid m \in M \}$ erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu e^1_m gehörigen Erzeuger mit $m \in M$.

Wir wählen $I^2 = R$, und für jede Relation $r = m_1 \cdots m_k \in R$ wählen wir eine 2-Zelle e^2_r, so dass die Verklebeabbildung $\varphi^2_r \colon S^1 \to X^1$ gerade das Element $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$ repräsentiert.

Aus Satz 2.69 folgt jetzt
$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle\, M \mid R \,\rangle = G\ . \qquad \square$$

2.71. BEISPIEL. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

(1) Eine orientierbare Fläche X_g vom *Geschlecht* $g \geq 0$ lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $2g$ Kanten $a_1, \dots, a_g$, $b_1, \dots, b_g$ und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung φ^2 entspreche der Schleife $a_1 b_1 \bar a_1 \bar b_1 \cdots a_g b_g \bar a_g \bar b_g$, und wir erhalten die Präsentation
$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle\, a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \,\rangle\ .$$
Für $g = 0$ erhalten wir die Sphäre S^2, für $g = 1$ den Torus T^2. Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelisierung
$$\pi_1(X_g, x_0)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}\ .$$

(2) Eine nicht orientierbare Fläche Y_g vom Geschlecht $g \geq 0$ lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $g+1$ Kanten $a_0, \dots, a_g$ und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife $a_0^2 \cdots a_g^2$, also gilt
$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \dots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle\ .$$
Für $g = 0$ erhalten wir $\mathbb{R}P^2$, für $g = 1$ die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelisierung
$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1}/\langle (2, \dots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ,$$
wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern $a_1, \dots, a_g$ und $a_0 + \dots + a_g$ gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

2.h. Übungen zu Kapitel 2

Übungen zu Abschnitt 2.a.

2.72. Übung. Sei (X, A) ein Paar und Y ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von X nach Y.

2.73. Übung. Seien X, Y, Z topologische Räume, und seien $F\colon X \to Y$ und $G\colon Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen P, Q mit $P \circ F \sim \mathrm{id}_X$, $F \circ P \sim \mathrm{id}_Y \sim Q \circ G$ und $G \circ Q \sim \mathrm{id}_Z$. Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \mathrm{id}_Z \;.$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Übungen zu Abschnitt 2.b.

2.74. Übung. Seien X, Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1\bigl(X \times Y, (x, y)\bigr) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \;.$$

2.75. Übung. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

(1) Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
(2) Jede Abbildung $F\colon S^1 \to X$ lässt sich zu einer Abbildung $\overline{F}\colon D^2 \to X$ mit $\overline{F}|_{\partial D^2} = F$ ausdehnen.
(3) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ sind für alle $x \in X$ trivial.
(4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten x, $y \in X$ sind homotop.

2.76. Übung. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X genau dann abelsch ist, wenn für alle x, $y \in X$ der Isomorphismus

$$\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) \;, \qquad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0]$$

nicht vom Weg γ_0 von x nach y abhängt.

2.77. Übung. (1) Sei $\circ$ eine Verknüpfung auf einer Menge G und $e \in G$. Dann sind äquivalent:
   (a) $(G, \circ, e)$ ist eine Gruppe.
   (b) Es gibt eine Kategorie $\mathcal{G}$ in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.5) mit $\mathrm{Obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$ mit Verknüpfung $\circ$ und $\mathrm{id}_* = e$.

(2) Seien G, H Gruppen, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ Kategorien wie in (1) und sei $F\colon G \to H$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
   (a) F ist ein Gruppenhomomorphismus.
   (b) Es gibt einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ mit $\mathcal{F}* = *$ und $\mathcal{F} = F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(*, *)$.

Übungen zu Abschnitt 2.c.

2.78. Übung. Seien T (Toast), S (Schinken) und A (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die jede der drei Teilmengen T, S und A in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

Hinweis: Zu jedem $v \in S^2$ existiert (mindestens) ein $d = d_v$, so dass die Hyperebene

$$\bigl\{x \bigm| \langle x, v\rangle = d\bigr\}$$

das gesamte Sandwich $T \cup S \cup A$ in zwei gleichgrosse Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen t, s und $a\colon S^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$t(v) = \operatorname{vol}\bigl\{\, x \in T \bigm| \langle x, v\rangle \le d_v \,\bigr\}$$

und s, a analog nicht von der Wahl von d_v wie oben, sondern nur von v abhängen, und in v stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.79. Übung. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z^0 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie: Für $R > \max\bigl\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\bigr\}$ ist der Pfad

$$\gamma\colon S^1 \to S^1\,, \qquad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

in S^1 homotop zu $\gamma_0 : S^1 \to S^1, \gamma_0(z) = z^n$. Folgern Sie: P hat mindestens eine Nullstelle z_0 mit $|z_0| \le R$.

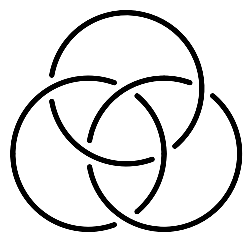
Übungen zu Abschnitt 2.d.

2.80. Übung. Seien G, H Gruppen. Zeigen Sie:

(1) Das Zentrum $Z(G * H) = \{\, z \in G * H \mid zw = wz$ für alle $w \in G * H \,\}$ von $G * H$ ist die triviale Gruppe $\{e\} = \{\emptyset\} \subset\ G * H$;

(2) alle Torsionselemente (Elemente $w \in G * H$ mit $w^N = e$ für ein $N > 0$) sind von der Form $w = vgv^{-1}$ oder $w = vhv^{-1}$ mit $v \in G * H$ und $g \in G$ bzw. $h \in H$ mit $g^N = e$ bzw. $h^N = e$.

2.81. Übung. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.44 (2), dass die Borromäischen Ringe R_1, R_2, $R_3 \subset \mathbb{R}^3$ sich im umgebenden $\mathbb{R}^3$ nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse $[\gamma] \in \pi_1\bigl(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)\bigr) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ eines Weges γ, der R_3 parametrisiert.



2.82. Übung. Es sei

$$X = \bigcup_{n \ge 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos\varphi + 1, \sin\varphi) \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass X überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede $\mathbb{Z}$-wertige Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ genau a_n-mal umläuft.

2.83. Übung. Es sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ schreibe $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definiert man die Abelisierung von G als

$$G^{\mathrm{ab}} = G \bigm/ \bigl(\{\, [g,h] \mid g, h \in G \,\}\bigr)\,.$$

Es sei $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

(1) Die Gruppe G^{ab} ist abelsch (kommutativ).

(2) Sei H eine abelsche Gruppe und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{f}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H$, so dass $f = \overline{f} \circ p$.

2.84. Übung. Seien G, H Gruppen, $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$, $q\colon H \to H^{\mathrm{ab}}$ wie in Aufgabe 2.83, und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

(1) Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\mathrm{ab}}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\mathrm{ab}} \circ p$.
(2) Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.
(3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen F_k und F_l für $k \neq l$ nicht isomorph sind.

2.85. Übung. Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „$\times$", Koprodukte „$\sqcup$" und Pushouts „$\cup$" gibt, und sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in $\mathcal{D}$, und zwar

$$\mathcal{F}(A \times B) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B),$$
$$\mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B),$$
$$\mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B),$$

für alle Objekte A, B, C von $\mathcal{C}$ und Morphismen $f\colon C \to A$, $g\colon C \to B$.

Übungen zu Abschnitt 2.e.

2.86. Übung. Seien $p\colon \widetilde{X} \to X$, $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ und $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie:

(1) sei $A \subset X$ eine Unterraum und $\widetilde{A} = p^{-1}A \subset \widetilde{X}$, dann ist $p|_{\widetilde{A}}\colon \widetilde{A} \to A$ eine Überlagerung;
(2) die natürliche Abbildung $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ ist eine Überlagerung.

2.87. Übung. Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wobei X zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

(1) die Mengen $p^{-1}(\{x\}) \subset \widetilde{X}$ sind für alle $x \in X$ gleichmächtig;
(2) der Raum $\widetilde{X}$ ist genau dann kompakt, wenn X kompakt ist und $p^{-1}(\{x_0\})$ endlich ist für ein $x_0 \in X$.

2.88. Übung. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{\, \left(2 + \sin \tfrac{\pi}{t}\right) e^{2\pi i t} \;\middle|\; \varphi \in (0,1] \,\right\} \cup [1,3] \subset \mathbb{C}\,.$$

(1) Skizzieren Sie Y, und zeigen Sie, dass $\pi_1(Y) = 0$.
(2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion $F\colon Y \to S^1 \subset \mathbb{C}$ dennoch keinen Lift $\widetilde{F}\colon Y \to \mathbb{R}$ zulässt.

Übungen zu Abschnitt 2.f.

2.89. Übung. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Kreise um $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ mit Radius $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wie in Übung 2.82, und X trage die vom $\mathbb{R}^2$ induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie X und zeigen Sie, dass X keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.90. Übung. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei $X = ((-1,1) \times \{1,-1\})/\sim$ der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.28, wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$" erzeugt werde von $(t,1) \sim (t,-1)$ für alle $t \neq 0$.

(1) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
(2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von X.
(3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.

Literatur

[Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[At] M. F. Atiyah, K-Theory, W. A. Benjamin, New York, 1967.

[tD1] T. tom Dieck, Topologie, de Gruyter Lehrbuch, de Gruyter, Berlin, 1991, x+401S.

[tD2] ———, Algebraic Topology, EMS textbooks in Mathematics, EMS, Zürich, 2008, xii+567S.

[D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topologogy, Springer, Berlin, 1972, xi+377S.

[DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, Trace and Transfer, Proc. Stekhlov Inst. Math. 154, 1984, 85–103.

[En] R. Engelking, General Topology, PWN, Warsawa, 1977, 626S.

[ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.

[F] P. Freyd, Abelian Categories, Harper & Row, New York, 1964, xi+164S.

[H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S., `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[H2] A. Hatcher, Vector bundles and K-theory, preprint, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`

[Ho] M. Hovey, Model Categories, Math. Surv. and Monogr. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1999, xii+209S.

[J] K. Jänich, Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, ix+215S.

[M] P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S., `http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

[Mi] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA. 1965, ix+65S.

[Que] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, ix+195S.

[Qui] D. G. Quillen, Homotopical Algebra, Lect. Notes Math. 43, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1967, 160S.

[R] Y. B. Rudyak: On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xii+587S.

[S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Corrected reprint, Springer, Berlin, 1981, xvi+528S.

[SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Second edition, Springer, New York - Heidelberg, 1978, xi+244S.

[St] N. Strickland, The category of CGWH spaces, preprint, 2009, `neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/homotopy/cgwh.pdf`

[Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.

Stichwortverzeichnis