Übungsblatt 10
Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 4.7. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) M habe ein triviales stabiles Normalenbündel. Dann ist TM trivial.

(ii) Sei $V \to \mathbb{C}P^n$ das komplexe Geradenbündel zur Hopffaserung $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Dann gilt $MV \cong \mathbb{C}P^{n+1}$.

(iii) $H^1(M;\mathbb{Z})$ beschreibt Bordismusklassen von Hyperflächen mit normaler Orientierung.

(iv) Es sei $M \subseteq N$ Untermannigfaltigkeit mit orientierbarem Normalenbündel. Dann ist M orientierbar.

(v) Es sei $M \subseteq N$ orientierbare Untermannigfaltigkeit mit orientierbarem Normalenbündel. Dann ist N orientierbar.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 5+5 Punkte)

(i) Bestimmen Sie $\mathrm{Bun}_{\mathrm{SO}(2)}(S^1)$ und $\mathrm{Bun}_{\mathrm{O}(2)}(S^1)$.

(ii) Gegeben sei ein $f\colon S^1 \to B\mathrm{O}(2)$. Wie viele Abbildungen $\theta\colon S^1 \to B\mathrm{SO}(2)$ gibt es, so dass

$$\begin{tikzcd} & B\mathrm{SO}(2) \arrow[d] \\ S^1 \arrow[ur, dashed, "\theta"] \arrow[r, "f"'] & B\mathrm{O}(2) \end{tikzcd}$$

kommutiert in Abhängigkeit von f.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es seien $V \to X$, $W \to Y$ Euklidische Vektorbündel. Zeigen Sie:

(i) Eine Abbildung Euklidischer Vektorbündel im Sinne von Definition 6.38 induziert eine Abbildung von Thom-Räumen $MV \to MW$.

(ii) Das kartesische Produkt $V \times W$ ist ein Euklidisches Vektorbündel über $X \times Y$ mit Thom-Raum $MV \wedge MW$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Es sei N eine Mannigfaltigkeit mit Untermannigfaltigkeiten M_0, M_1. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen aus Bemerkung 6.74:

(i) Die Diagonalabbildung $\Delta\colon N \to N \times N$ ist genau dann zu $M_0 \times M_1 \subset N \times N$ transversal, wenn M_0 zu M_1 transversal ist.

(ii) In jedem Fall gilt $\Delta^{-1}(M_0 \times M_1) = M_0 \cap M_1$.