Übungsblatt 4
Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 16.5. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei MA_k ein Mooreraum zur abelschen Gruppe A mit $k \geq 2$, dann gilt $\pi_k(MA_k) = A$ und $\pi_n(MA_k) = 0$ für $n \neq k$.

(ii) Es sei A eine abelsche Gruppe, dann ist $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, \cdot)\colon \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ stetig.

(iii) Es sei $\Bbbk$ ein Körper, dann gilt $\mathrm{Ext}_{\Bbbk}(A, B) = 0$ und $\mathrm{Tor}_{\Bbbk}(A, B) = 0$ für alle $\Bbbk$-Moduln A, B.

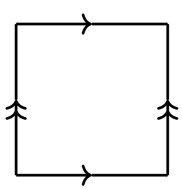
(iv) Es sei $f\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ eine Abbildung zwischen Kettenkomplexen so, dass $f_*\colon H(C_\bullet, d_\bullet) \to H(C'_\bullet, d'_\bullet)$ ein Isomorphismus ist, dann ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz.

(v) Es sei $(C_\bullet, d_\bullet)$ ein Kettenkomplex über einem Körper $\Bbbk$, dann existiert eine Kettenhomotopieäquivalenz $f\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (H(C_\bullet, d_\bullet), 0)$.

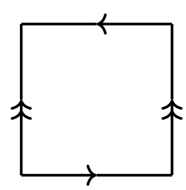
Aufgabe 2 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Berechnen Sie $\tilde{H}^{CW}_\bullet(X; \mathbb{Z})$ und $\tilde{H}^{CW}_\bullet(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für die folgenden Räume:

(i) Fassen Sie den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegen”uberliegende Seiten identifizieren.

(ii) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche X, die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie X für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle auf.



Torus



Kleinsche Flasche

Aufgabe 3 (10 Punkte) Präzisieren Sie die Aussage, dass der in konstruierte Isomorphismus

$$\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X \wedge Y; R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \xrightarrow{\cong} \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X; R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \otimes \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y; R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big)$$

natürlich ist, und beweisen Sie sie.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Wir wollen I^n als CW-Komplex mit $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ Zellen der Dimension k darstellen. Wir orientieren $I^n \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis, und wir orientieren die Rand-Hyperflächen von I^n durch solche Basen des tangentialen $(n-1)$-dimensionalen Vektorraums, dass Voranstellen des äußeren Normalenvektors wieder eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ liefert.

(i) Beschreiben Sie den zellulären Rand der n-Zelle von I^n.

(ii) Betrachten Sie jetzt $I^m \times I^n = I^{m+n}$ und überprüfen Sie, dass sich der Rand der $(m+n)$-Zelle wie in Proposition 5.65 verhält.