ÜBUNGSBLATT 5
Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 31.5. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es seien A und B abelsche Gruppen und MA_n und MB_n die zugehörigen Mooreräume für $n \geq 1$, dann ist $MA_n \wedge MB_n$ ein Mooreraum zur Gruppe $A \otimes B$.

(ii) Es sei X topologischer Raum so, dass $H_\bullet(X, \mathbb{Z})$ endlich erzeugt ist, dann ist

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \mathrm{rank} H_n(X, \mathbb{Z}) = \sum_n (-1)^n \mathrm{rank} H_n(X, \Bbbk)$$

für alle Körper $\Bbbk$.

(iii) Es sei $\{A_\alpha\}$ eine Familie von abelschen Gruppen und es sei B eine abelsche Gruppe, dann ist $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_\alpha A_\alpha, B) = \prod_\alpha \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A_\alpha, B)$.

(iv) Es sei $f\colon S^n \to S^n$ stetig, dann ist $f^*\colon \tilde{h}^n(S^n) \to \tilde{h}^n(S^n)$ gegeben durch die Multiplikation mit $\deg(f)$.

(v) Es sei $(C_\bullet, d_\bullet)$ ein Kettenkomplex von R-Moduln, dann wird $\tilde{C}_k = \mathrm{Hom}(C_{-k}, R)$ durch $\tilde{d} = \circ d\colon \tilde{C}_k \to \tilde{C}_{k-1}$ zu einem Kettenkomplex und es gilt $H_\bullet(\tilde{C}_\bullet, \tilde{d}) = H_\bullet(C_\bullet, d)$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 für Kohomologie-Funktoren.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Es seien inverse Systeme (A_i, f_i), (A'_i, f'_i) und (A''_i, f''_i) wie in Bemerkung 6.12 gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass alle f'_i surjektiv sind. Folgern Sie daraus

$$\lim{}^1 A'_i = 0\ .$$

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes i ein $j \geq i$ existiert mit $f''_{i+1} \circ \cdots \circ f''_k = 0$ für alle $k \geq j$, falls (A_i, f_i) die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Folgern Sie, dass dann

$$\lim{}^1 A''_i = 0\ .$$

Aufgabe 4 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Schreiben Sie das inverse System aus Beispiel 6.8 als

$$(A'_\bullet, f_\bullet) = \big(3^0\mathbb{Z} \hookleftarrow 3^1\mathbb{Z} \hookleftarrow 3^2\mathbb{Z} \hookleftarrow \cdots\big)$$

mit den offensichtlichen Inklusionen und betrachten Sie die inversen Systeme $A_i = \mathbb{R}$, $A''_i = \mathbb{R}/3^i\mathbb{Z}$, so dass Sie eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (A'_\bullet, f'_\bullet) \longrightarrow (A_\bullet, f_\bullet) \longrightarrow (A''_\bullet, f''_\bullet) \longrightarrow 0$$

von inversen Systemen erhalten.

(i) Zeigen Sie, dass $(A_\bullet, f_\bullet)$ und $(A''_\bullet, f''_\bullet)$ die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllen.

(ii) Berechnen Sie $\lim^1 A'_i$ mit der langen exakten Sequenz aus Satz 6.10.