

ÜBUNGSBLATT 6

Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 6.6. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) Es sei X ein CW-Komplex. Dann folgt aus $\tilde{H}^\bullet(X) = 0$, dass $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$.
- (ii) Es seien X, Y CW-Komplexe und $f: X \rightarrow Y$ eine zelluläre Abbildung so, dass $f^*: H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$ ein Isomorphismus ist, dann ist f eine Homotopieäquivalenz.
- (iii) Das Kronecker-Produkt $\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist für alle $1 \leq k \leq n$ trivial.
- (iv) Es seien V und W Vektorräume, dann gibt es ein natürliches links-Inverses $p: (V \otimes W)^* \rightarrow V^* \otimes W^*$ zu der kanonischen Abbildung $V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$.
- (v) Für $a \in \tilde{H}_\bullet(X; \mathbb{Q})$ und $\alpha \in \tilde{H}^\bullet(X; \mathbb{Q})$ gilt

$$a/7\alpha = \frac{1}{7}a/\alpha.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte = 3+4+3 Punkte) Es seien $X = \mathbb{R}P^2 \times S^3$ und $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^3$.

- (i) Zeigen Sie, dass X und Y isomorphe Homotopiegruppen haben.
- (ii) Bestimmen Sie die ganzzahligen Homologiegruppen von X und Y .
- (iii) Bestimmen Sie die ganzzahligen Kohomologiegruppen von X und Y .

Aufgabe 3 (10 Punkte) Wir betrachten den Moore-Raum MA_k zur Gruppe $A = \mathbb{Z}/n$ und die Abbildungen $f, g: MA_k \rightarrow S^{k+1}$ aus Aufgabe 4 auf Blatt 3. Bestimmen Sie $\tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(MA_k; \mathbb{Z})$ und die Abbildungen $f^*, g^*: \tilde{H}^\bullet(S^{k+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^\bullet(MA_k; \mathbb{Z})$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 4 auf Blatt 3.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Beweisen Sie einige der fehlenden Aussagen in Proposition 6.22.

- (i) Zeigen Sie zunächst einige der Aussagen in (3) und (5) zum Smashprodukt.
- (ii) Beweisen Sie dann die zweite Aussage in (4) auf Ketten- / Kokettenniveau.
- (iii) Leiten Sie daraus alle anderen Aussagen über das Schrägprodukt ab.